

**Extremalprobleme bei
asymptotischen Dichten von Summenmengen
ganzer Zahlen**

Dissertation
zur Erlangung des Grades
„Doktor
der Naturwissenschaft“
am Fachbereich Mathematik
der Johannes Gutenberg-Universität
in Mainz

Peter Stoll
geb. in Kandel

Mainz 1978

Extremalprobleme bei asymptotischen Dichten von Summenmengen ganzer Zahlen

D i s s e r t a t i o n
zur Erlangung des Grades
„Doktor
der Naturwissenschaft“
am Fachbereich Mathematik
der Johannes Gutenberg-Universität
in Mainz

Peter Stoll
geb. in Kandel

Mainz 1978



Dekan:

Prof. Dr. A. Pfister

Erster Berichterstatter:

Prof. Dr. G. Hofmeister

Zweiter Berichterstatter:

Prof. Dr. E. Härtter

Tag der mündlichen Prüfung: 10. Juli 1978

Extremalprobleme bei asymptotischen Dichten von Summenmengen ganzer Zahlen

§1. Bezeichnungen und Hilfsmittel

Abkürzend für die Menge der nichtnegativen ganzen Zahlen schreiben wir $\mathbb{N}_0$, für die Menge der positiven ganzen Zahlen $\mathbb{N}$. Große deutsche Buchstaben stehen für nichtleere Mengen ganzer Zahlen; kleine lateinische Buchstaben bezeichnen Elemente aus $\mathbb{N}_0$, kleine griechische Buchstaben reelle Zahlen. Falls nicht stärker eingeschränkt wird, sei stets $g, h, k, n \in \mathbb{N}$ und überdies $h \geq 2$ sowie $0 < \eta < 1$ gefordert.

Ist ξ reell, so bezeichnet $[\xi]$ die größte ganze Zahl $\leq \xi$ sowie $\langle \xi \rangle$ die kleinste ganze Zahl $\geq \xi$.

Sind die Zahlen $a_1, \dots, a_k$ nicht alle gleich Null, so sei $(a_1, \dots, a_k)$ deren größter gemeinsamer Teiler. Existieren zu gegebenem α Elemente $a_1, \dots, a_k$, die alle in α liegen und $(a_1, \dots, a_k) = 1$ erfüllen, so schreiben wir kurz $G.G.T.(\alpha) = 1$. Wir setzen

$$\mathcal{N} := \{\alpha \mid 0 \in \alpha \text{ und } G.G.T.(\alpha) = 1\}.$$

Die Anzahl der positiven Elemente $\leq x$ einer Menge α bezeichnet

$$A(x) = \sum_{\substack{a \in \alpha \\ 1 \leq a \leq x}} 1. \text{ Wie üblich definieren wir die untere asymptotische}$$

Dichte von α als $\underline{d}(\alpha) := \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{A(x)}{x}$; für ein System $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ sei

$$\underline{d}(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \sum_{i=1}^k A_i(x) \text{ gesetzt. Es ist } 0 \leq \sum_{i=1}^k \underline{d}(\alpha_i) \leq \underline{d}(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \leq k,$$

insbesondere $0 \leq \underline{d}(\alpha) \leq 1$. Im Falle $\alpha = \alpha_1 = \dots = \alpha_k$ gilt $k \underline{d}(\alpha) = \underline{d}(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$.

Die Summe $\alpha + \mathcal{L}$ der Mengen α und $\mathcal{L}$ sei $\alpha + \mathcal{L} := \{\alpha + \beta \mid \alpha \in \alpha \text{ und } \beta \in \mathcal{L}\}$ gesetzt, wobei wir $2\alpha := \alpha + \alpha$ abkürzen; allgemeiner wird bekanntlich

$$\sum_{i=1}^h \alpha_i := \left(\sum_{i=1}^{h-1} \alpha_i \right) + \alpha_h \text{ und } h\alpha := (h-1)\alpha + \alpha \text{ rekursiv definiert. Um}$$

triviale Summen auszuschließen wird stets $h \geq 2$ gefordert.

Zwei Mengen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{L}$, die bis auf endlich viele Elemente identisch sind, heißen asymptotisch gleich; wir schreiben dann kurz $\mathcal{A} \sim \mathcal{L}$. Offensichtlich folgt aus $\mathcal{A} \sim \mathcal{L}$ die Existenz eines n_0 mit

$$(1) \quad \mathcal{A} \cap [n_0, \infty) = \mathcal{L} \cap [n_0, \infty).$$

Wir sagen, daß $\mathcal{A}$ asymptotische Basis der genauen Ordnung k ist, falls $k\mathcal{A} \sim \mathbb{N}_0$, nicht aber $(k-1)\mathcal{A} \sim \mathbb{N}_0$ gilt.

Schließlich bezeichnet $\{a\}^{(g)}$ die Restklasse $a \pmod{g}$; wir definieren $\{a_1, \dots, a_k\}^{(g)} := \bigcup_{i=1}^k \{a_i\}^{(g)}$ als Vereinigung der k Restklassen

zum Modul g . Für festes g sei weiter $\mathcal{A}^{(g)} := \bigcup_{a \in \mathcal{A}} \{a\}^{(g)}$ gesetzt; dies bedeutet, daß $\mathcal{A}^{(g)}$ die kleinste Obermenge von $\mathcal{A}$ ist, die mit jedem $a \in \mathcal{A}$ auch die gesamte Restklasse $\{a\}^{(g)}$ enthält.

Offensichtlich gilt

$$\left(\sum_{i=1}^h a_i\right)^{(g)} = \sum_{i=1}^h (a_i)^{(g)} \quad \text{ sowie } \quad \underline{d}(a_1^{(g)}, \dots, a_h^{(g)}) = \sum_{i=1}^h \underline{d}(a_i^{(g)}).$$

Wichtigstes Hilfsmittel im folgenden ist ein auf Kneser zurückgehendes Resultat: Sind $\alpha_1, \dots, \alpha_h$ Mengen ganzer Zahlen, so gilt

$$(2) \quad \underline{d}(\alpha_1, \dots, \alpha_h) \leq \underline{d}\left(\sum_{i=1}^h \alpha_i\right)$$

oder es existiert ein g mit den beiden Eigenschaften

$$(3) \quad \sum_{i=1}^h \alpha_i \sim \sum_{i=1}^h \alpha_i^{(g)}$$

und

$$(4) \quad \underline{d}(\alpha_1^{(g)}, \dots, \alpha_h^{(g)}) \leq \underline{d}\left(\sum_{i=1}^h \alpha_i^{(g)}\right) + \frac{h-1}{g}.$$

Einen Beweis entnehmen wir Kneser [4]. Vgl. auch die Darstellung bei Halberstam u. Roth [2], §§ 7-10.

Bemerkung. Zu einem gegebenen System $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_h$

definieren¹⁾ wir $\tilde{\beta}_i := \begin{cases} \max \{ \beta_i \mid \beta_i \in \mathcal{L}_i \} & \text{falls } \mathcal{L}_i \cap N_0 = \emptyset, \\ \min \{ \beta_i \mid \beta_i \in \mathcal{L}_i \} & \text{sonst,} \end{cases}$

ferner $\tilde{\mathcal{L}}_i := \{ \beta_i - \tilde{\beta}_i \mid \beta_i \in \mathcal{L}_i \} \cap N_0$. Für $i = 1, \dots, h$ gilt $0 \in \tilde{\mathcal{L}}_i$ sowie $\tilde{\mathcal{L}}_i \subset N_0$ und $\underline{d}(\tilde{\mathcal{L}}_i) = \underline{d}(\mathcal{L}_i)$ bzw. $\underline{d}(\tilde{\mathcal{L}}_1, \dots, \tilde{\mathcal{L}}_h) = \underline{d}(\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_h)$. Wegen

$$\sum_{i=1}^h \tilde{\mathcal{L}}_i = \left\{ \sum_{i=1}^h (\beta_i - \tilde{\beta}_i) \mid \beta_i \in \mathcal{L}_i \text{ und } \beta_i - \tilde{\beta}_i \geq 0 \right\} \subseteq \left\{ \sum_{i=1}^h (\beta_i - \tilde{\beta}_i) \mid \beta_i \in \mathcal{L}_i \right\} = \sum_{i=1}^h \mathcal{L}_i + \left\{ \sum_{i=1}^h (-\tilde{\beta}_i) \right\}$$

folgt $\underline{d}(\sum_{i=1}^h \tilde{\mathcal{L}}_i) \leq \underline{d}(\sum_{i=1}^h \mathcal{L}_i)$ und damit im Falle $\underline{d}(\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_h) > \underline{d}(\sum_{i=1}^h \mathcal{L}_i)$

die Ungleichung $\underline{d}(\tilde{\mathcal{L}}_1, \dots, \tilde{\mathcal{L}}_h) = \underline{d}(\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_h) > \underline{d}(\sum_{i=1}^h \mathcal{L}_i) \geq \underline{d}(\sum_{i=1}^h \tilde{\mathcal{L}}_i)$.

Also existiert zu jedem System $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_h$, das (2) nicht erfüllt, ein System $\tilde{\mathcal{L}}_1, \dots, \tilde{\mathcal{L}}_h$ von Mengen aus N_0 mit

$$0 \in \tilde{\mathcal{L}}_i \text{ und } \underline{d}(\tilde{\mathcal{L}}_i) = \underline{d}(\mathcal{L}_i) \text{ für } i = 1, \dots, h,$$

das (2) ebenfalls nicht erfüllt. Daher bedeutet es für Abschätzungen der hier betrachteten Art keine Einschränkung, wenn wir im folgenden immer nur nichtnegative Elemente aus den jeweils betrachteten Mengen herausgreifen oder etwa $0 \in \bigcap_{i=1}^h \mathcal{L}_i$ fordern. Vgl. z.B. Rohrbach und Volkmann [9].

§ 2. Verallgemeinerung eines Satzes von Schur

Ein Satz von Schur besagt, daß für $0 \in \mathcal{A} \cap \mathcal{L}$ aus $1 < \underline{d}(\mathcal{A}, \mathcal{L})$ stets $(\mathcal{A} + \mathcal{L}) \sim N_0$ folgt. Vgl. hierzu auch Rohrbach [8], Satz 2* sowie eine Verallgemeinerung bei Ostmann [7], 12 Satz 1. Eine Übertragung des Resultates auf h Mengen bringt

Satz 1. Sei $h \geq 2$ gegeben. Liegen mindestens 3 Mengen eines Systems $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_h$ in $\mathcal{N}$, so folgt aus

$$(5) \quad \underline{d}(\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_h) > \frac{s+h}{s+2},$$

daß $\sum_{i=1}^h \mathcal{A}_i \sim N_0$ ist.

1) Wir beachten $\beta_i, \dots, \beta_h \in N_0$.

Beweis. Wegen $h \geq 2$ und (5) gilt $1 \leq \frac{s+h}{s+2} < \underline{d}(\alpha_1, \dots, \alpha_h) \leq \underline{d}(\sum_{i=1}^h \alpha_i) \leq 1$
also folgt nach dem Resultat von Kneser die Existenz eines g mit

$$(6) \quad \sum_{i=1}^h \alpha_i \sim \sum_{i=1}^h \alpha_i^{(g)}$$

und

$$(7) \quad \underline{d}(\alpha_1^{(g)}, \dots, \alpha_h^{(g)}) \leq \underline{d}(\sum_{i=1}^h \alpha_i^{(g)}) + \frac{h-1}{g}.$$

Annahme: Sei $\underline{d}(\sum_{i=1}^h \alpha_i^{(g)}) < 1$. Offensichtlich folgt $\underline{d}(\sum_{i=1}^h \alpha_i^{(g)}) \leq \frac{g-1}{g}$.
Mit (5) wird (7) zu

$$(8) \quad \frac{s+h}{s+2} < \underline{d}(\alpha_1^{(g)}, \dots, \alpha_h^{(g)}) \leq \underline{d}(\sum_{i=1}^h \alpha_i^{(g)}) + \frac{h-1}{g} \leq 1 + \frac{h-2}{g}.$$

Dies liefert für $h=2$ den Widerspruch $1 = \frac{s+h}{s+2} < 1 + \frac{h-2}{g} = 1$.

Für $h \geq 3$ wird (8) zu $\frac{h-2}{s+2} = \frac{s+h}{s+2} - 1 < \frac{h-2}{g}$, was

$$(9) \quad g < s+2$$

bedingt. Andererseits muß den Voraussetzungen zufolge für s Mengen α des Systems sicher $\frac{s}{g} \leq \underline{d}(\alpha^{(g)})$ und für die restlichen

$h-s$ Mengen noch $\frac{1}{g} \leq \underline{d}(\alpha^{(g)})$ gelten; also folgt $\frac{h+s}{g} \leq \sum_{i=1}^h \underline{d}(\alpha_i^{(g)}) =$

$= \underline{d}(\alpha_1^{(g)}, \dots, \alpha_h^{(g)})$; mit (8) erhalten wir nun $\frac{h+s}{g} \leq 1 + \frac{h-2}{g}$,

was $g \geq s+2$ im Widerspruch zu (9) bedeutet.

Damit ist in jedem Fall $\underline{d}(\sum_{i=1}^h \alpha_i^{(g)}) = 1$ und folglich $\sum_{i=1}^h \alpha_i^{(g)} = N_0$ gezeigt.

Die Behauptung folgt mit (6).



2) Zu Mengen $\alpha = \alpha^{(g)}$ existiert $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{A(x)}{x}$. Also gilt

$$\underline{d}(\alpha_1^{(g)}, \dots, \alpha_h^{(g)}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^h \frac{A_i(x)}{x} = \sum_{i=1}^h \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{A_i(x)}{x} = \sum_{i=1}^h \underline{d}(\alpha_i^{(g)}).$$

Bemerkung. Im Falle $h=2$ gilt $\frac{h+s}{2+s} = 1$ für alle s ; also ist das Resultat von Schur in Satz 1 enthalten.

Beispiel. Sei $h \geq 3$. Wir definieren $\alpha_s := \dots := \alpha_h := \{0, 1\}^{(s+2)}$ sowie $\alpha_{s+1} := \dots := \alpha_h := \{0\}^{(s+2)}$; zwar gilt $\underline{d}(\alpha_1, \dots, \alpha_h) = \frac{s+h}{s+2} > \frac{(s+1)+h}{(s+1)+2}$, nicht aber $\sum_{i=1}^h \alpha_i \sim \mathbb{N}_0$. Also genügt im allgemeinen $\underline{d}(\alpha_1, \dots, \alpha_h) \geq \frac{s+h}{s+2}$ nicht als Voraussetzung zu Satz 1; ferner kann s in (5) nicht größer gewählt werden, als die Zahl der in $\mathcal{N}$ liegenden Mengen aus $\{\alpha_1, \dots, \alpha_h\}$.

Weitere Beispiele zu Satz 1 sind in §5 notiert.

Im Falle $\alpha_1 = \dots = \alpha_h$ wird Satz 1 zu

Folgerung 1. Seien $\alpha \in \mathcal{N}$ und $h \geq 2$ gegeben; aus $\underline{d}(\alpha) > \frac{2}{h+2}$ folgt $h\alpha \sim \mathbb{N}_0$.

Nun gestattet Folgerung 1 einen kurzen Beweis der folgenden auf Kneser [4], Satz 5 zurückgehenden Anwendung des in §1 notierten Resultates von Kneser. Ist eine Menge α gegeben mit $\alpha \in \mathcal{N}$ und $\underline{d}(\alpha) > 0$, so gilt für die genaue asymptotische Ordnung h_α von α die Abschätzung

$$h_\alpha \leq \begin{cases} 2 & , \text{ falls } \frac{1}{2} < \underline{d}(\alpha) \text{ ist,} \\ \left[\frac{2}{\underline{d}(\alpha)} \right] - 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweis. Genau dann gilt $h \geq \left[\frac{2}{\underline{d}(\alpha)} \right] - 1$, wenn $\underline{d}(\alpha) > \frac{2}{h+2}$ ist.

Mit Folgerung 1 und $h \geq 2$ folgt $h\alpha \sim \mathbb{N}_0$ aus $h \geq \max \left\{ 2, \left[\frac{2}{\underline{d}(\alpha)} \right] - 1 \right\}$.

Also muß $h_\alpha \leq \max \left\{ 2, \left[\frac{2}{\underline{d}(\alpha)} \right] - 1 \right\}$ sein.

§ 3. Eine verwandte Fragestellung

Sei h gegeben. In Folgerung 1 wurde gezeigt, welche Größe für $\underline{d}(\alpha)$ ausreicht, um sicherzustellen, daß $h\alpha \sim N_0$ und insbesondere $\underline{d}(h\alpha) = 1$ gilt. Ergänzend dazu fragen wir, wie groß $\underline{d}(\alpha)$ sein kann, so daß gleichwohl noch $\underline{d}(h\alpha) < 1$ folgt, oder allgemeiner $\underline{d}(h\alpha) < \eta$ für ein vorgegebenes η . Letzteres Problem, in dem möglichst dicke Mengen α mit möglichst dünner Summe $h\alpha$ gesucht werden, läßt sich auch als eine Verallgemeinerung der Bestimmung maximaler Nichtbasen³⁾ oder als eine Gegenfrage zur Bestimmung der dünnsten Basen zur Ordnung h auffassen.

Entsprechend diesem Gedanken wird nun in §3 zu gegebenem Tripel (h, η, n) eine Menge $\alpha = \alpha(h, \eta, n) \in \mathcal{N}$ größtmöglicher Dichte gesucht, für die $\underline{d}(h\alpha) \leq \eta$ und zusätzlich von je n aufeinanderfolgenden Zahlen aus N_0 höchstens eine in $h\alpha$ ist.

Weil offensichtlich $\underline{d}(h\alpha) \leq \frac{1}{n}$ gelten muß, können wir uns auf den Fall $\eta \leq \frac{1}{n}$ beschränken.

In Satz 2 wird der Fall $\frac{h+1}{(h+1)n+1} \leq \eta$ behandelt; der Fall $\eta < \frac{h+1}{(h+1)n+1}$ bzw. der stärkere $\eta < \frac{1}{n}$ ist für $(\langle \frac{h+1}{\eta} \rangle, n, h+1) = 1$ in Satz 3, für Primzahlen n in Satz 4 enthalten.

Es ist nun möglich die Fragestellung zu erweitern, indem man statt h -mal die selbe Menge α nun die Mengen $\alpha_1, \dots, \alpha_h$ addiert; Es soll $\underline{d}(\alpha_1, \dots, \alpha_h)$ möglichst groß und $\underline{d}(\sum_{i=1}^h \alpha_i) \leq \eta$ sein. Sicher gilt $\underline{d}(\alpha_1, \dots, \alpha_h) \geq h \underline{d}(\alpha)$. Solche Systeme $\alpha_1, \dots, \alpha_h$ lernen wir in Satz 5 für den Fall $n=1$ kennen, für $n \geq 2$ und $(\langle \frac{h+1}{\eta} \rangle, n, h+1) = 1$ oder Primzahlen n in den Sätzen 6 und 7. Besonders interessiert die Frage, wann $\alpha_1 = \dots = \alpha_h = \alpha$ gewählt werden kann.

Es ist zu erwarten, daß derartige Mengen α bzw. $\alpha_1, \dots, \alpha_h$ zumindest asymptotisch gleich der Vereinigung von Restklassen eines Moduls g sind. Ein Hauptteil der folgenden Betrachtungen bildet die Bestimmung dieses Moduls g und der zugehörigen Restklassenvertreter. In vielen Fällen wird sich g von der Form $g = \langle \frac{h+1}{\eta} \rangle$ erweisen; allerdings gibt es hierzu bedeutende Ausnahmen.

Wir notieren zunächst einige Definitionen und Hilfsbetrachtungen.

3) Vgl. Nathanson [6].

$|a|_g$ sei die Anzahl der Restklassen modulo g , die mit $\mathcal{O}$ mindestens ein Element gemeinsam haben; dann gilt $|a|_g = g \underline{d}(\mathcal{O}^{(g)})$.

Die Menge $\mathcal{O}$ heißt genau dann n -diskret, wenn

$$\mathcal{O} \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} (\mathcal{O} + \{i\}) \right) = \emptyset$$

ist; dies bedeutet, daß für paarweise verschiedene Elemente a_1, a_2 aus $\mathcal{O}$ stets $n \leq |a_1 - a_2|$ eintritt. Insbesondere gilt dann $\underline{d}(\mathcal{O}) \leq \frac{1}{n}$; jede Menge ganzer Zahlen ist 1-diskret.

Sind für $\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_h$ die vier Aussagen

$$(10i) \quad \mathcal{O}_i \in \mathcal{N} \quad \text{für } i=1, \dots, h,$$

$$(10ii) \quad \underline{d}\left(\sum_{i=1}^h \mathcal{O}_i\right) \leq \eta,$$

$$(10iii) \quad \sum_{i=1}^h \mathcal{O}_i \text{ ist } n\text{-diskret,}$$

$$(10iv) \quad \text{aus } \mathcal{O}_i \in \mathcal{N} \text{ für } i=1, \dots, h \text{ mit } \underline{d}(\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_h) < \underline{d}(\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_h) \\ \text{folgt } \underline{d}\left(\sum_{i=1}^h \mathcal{O}_i\right) > \eta \quad \text{oder } \sum_{i=1}^h \mathcal{O}_i \text{ ist nicht } n\text{-diskret,}$$

erfüllt, so heißen $\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_h$ extrem dicht bezüglich (h, η, n) ; wird zusätzlich $\mathcal{O}_1 = \dots = \mathcal{O}_h = \mathcal{O}$ und $\mathcal{O}_1 = \dots = \mathcal{O}_h = \mathcal{O}$ gefordert, so heißt $\mathcal{O}$ extrem dicht bezüglich (h, η, n) .

Wir schreiben kurz $\{\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_h\} \in \mathcal{E}^*(h, \eta, n)$ bzw. $\mathcal{O} \in \mathcal{E}(h, \eta, n)$.

Für $m \geq 1$ sei

$$s_{\pm}(m) := \min \{x \mid m \equiv 0 \pmod{x} \text{ und } \left(\frac{m}{x}, t\right) = 1\}$$

gesetzt. Es gilt $s_{\pm}(m) = \prod_{\substack{p \mid t \\ p \nmid m}} p^{\nu}$. Weil $s_{\pm}(m)$ nur Primfaktoren besitzt, die sowohl m als auch t teilen, existiert ein ℓ mit

$$(m, t) \mid s_{\pm}(m) \mid (m, t)^{\ell}.$$

In den folgenden Hilfsbetrachtungen lernen wir Eigenschaften extrem dichter Mengen kennen.

Hilfssatz 1. Sei (h, η, n) gegeben. Erfüllt $\mathcal{L}$ die vier Voraussetzungen

- (11i) $\mathcal{L} \in \mathcal{N}$,
- (11ii) $d(\mathcal{L}) > \frac{1}{h}$,
- (11iii) $d(h\mathcal{L}) \leq \eta$,
- (11iv) $h\mathcal{L}$ ist n -diskret,

so existiert ein $g \geq 2$ und ein $\alpha \in \mathcal{E}(h, \eta, n)$ mit

$$(12i) \quad \frac{h|\alpha|_g - h + 1}{\eta} \leq g \leq \frac{|\alpha|_g}{d(\mathcal{L})}$$

und

$$(12ii) \quad 2 \leq |\alpha|_g \leq \frac{h-1}{h - \frac{\eta}{d(\mathcal{L})}}$$

sowie

$$(12iii) \quad \alpha = \alpha^{(g)}.$$

Ein Beweis kann dem von Hilfssatz 1* entnommen werden, wenn man $\mathcal{L}_1 = \dots = \mathcal{L}_h = \mathcal{L}$ und $\alpha \in \mathcal{E}(h, \eta, n)$ an Stelle von $\{\alpha_1, \dots, \alpha_h\} \in \mathcal{E}^*(h, \eta, n)$ wählt. Es sei darauf hingewiesen, daß Hilfssatz 1 kein Spezialfall von Hilfssatz 1* ist.

Hilfssatz 2. Sei (h, η, n) gegeben. Erfüllt $\mathcal{L}$ die Voraussetzungen von Hilfssatz 1 und gilt $d(\mathcal{L}) = \frac{|\alpha|_g}{g}$ für ein $\alpha \in \mathcal{E}(h, \eta, n)$, so ist auch $\mathcal{L} \in \mathcal{E}(h, \eta, n)$.

Diese Aussage ist eine Verbindung von konkretem $\mathcal{L}$ mit einem α , von welchem nur Eigenschaften einer extrem dichten Menge bekannt sind. Zum Beweis siehe Hilfssatz 2*.

Hilfssatz 1*. Sei (h, η, n) gegeben. Erfüllen $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_h$ die vier Voraussetzungen

$$(11i^*) \quad \mathcal{L}_i \in \mathcal{N} \text{ für } i=1, \dots, h,$$

$$(11ii^*) \quad \underline{d}(\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_h) > \eta,$$

$$(11iii^*) \quad \underline{d}\left(\sum_{i=1}^h \mathcal{L}_i\right) \leq \eta,$$

$$(11iv^*) \quad \sum_{i=1}^h \mathcal{L}_i \text{ ist } n\text{-diskret,}$$

so existieren ein $g \geq 2$ und $\{\sigma_1, \dots, \sigma_h\} \in \mathcal{E}^*(h, \eta, n)$ mit

$$(12i^*) \quad \frac{\sum_{i=1}^h |\sigma_i|_g - h + 1}{\eta} \leq g \leq \frac{\sum_{i=1}^h |\sigma_i|_g}{\underline{d}(\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_h)}$$

und

$$(12ii^*) \quad 2h \leq \sum_{i=1}^h |\sigma_i|_g \leq \frac{h-1}{1 - \frac{\eta}{\underline{d}(\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_h)}}$$

sowie

$$(12iii^*) \quad \sigma_i = \sigma_i^{(g)} \text{ für } i=1, \dots, h.$$

Beweis. Wir nehmen an, solche $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_h$ existieren. Wegen $\{\sigma_1, \dots, \sigma_h\} \in \mathcal{E}^*(h, \eta, n)$ muß

$$(13) \quad \underline{d}(\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_h) \leq \underline{d}(\sigma_1, \dots, \sigma_h)$$

und

$$(14) \quad \underline{d}\left(\sum_{i=1}^h \sigma_i\right) \leq \eta$$

gelten; mit (11i*) erhalten wir $\eta < \underline{d}(\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_h) \leq \underline{d}(\sigma_1, \dots, \sigma_h) \leq \underline{d}\left(\sum_{i=1}^h \sigma_i\right) \leq \eta$

Also existiert nach dem Resultat von Kneser ein g mit

$$(15) \quad \sum_{i=1}^h \sigma_i \sim \sum_{i=1}^h \sigma_i^{(g)}$$

und

$$(16) \quad \underline{d}(\sigma_1^{(g)}, \dots, \sigma_h^{(g)}) - \frac{h-1}{g} \leq \underline{d}\left(\sum_{i=1}^h \sigma_i^{(g)}\right).$$

Für $g=1$ ergibt (15) mit (14) den Widerspruch

$$1 = \underline{d}\left(\sum_{i=1}^h \sigma_i^{(1)}\right) = \underline{d}\left(\sum_{i=1}^h \sigma_i\right) \leq \eta < 1. \text{ Also ist } g \geq 2.$$

Mit (14) bis (16) folgt weiter

$$(17) \quad \sum_{i=1}^h \underline{d}(\sigma_i^{(g)}) - \frac{h-1}{g} = \underline{d}(\sigma_1^{(g)}, \dots, \sigma_h^{(g)}) - \frac{h-1}{g} \leq \underline{d}\left(\sum_{i=1}^h \sigma_i^{(g)}\right) = \underline{d}\left(\sum_{i=1}^h \sigma_i\right) \leq \eta.$$

Multiplizieren mit g ergibt

$$\sum_{i=1}^h |\sigma_i|_g - h + 1 \leq \eta g,$$

was in (12i*) zur Abschätzung von g nach unten führt.

Multiplizieren der Ungleichung (13) mit g liefert

$$g \underline{d}(\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_h) \leq g \underline{d}(\sigma_1, \dots, \sigma_h) \leq g \underline{d}(\sigma_1^{(g)}, \dots, \sigma_h^{(g)}) = g \left(\sum_{i=1}^h \underline{d}(\sigma_i^{(g)}) \right) = \sum_{i=1}^h |\sigma_i|_g,$$

was in (12i*) zur Abschätzung von g nach oben führt.

Aus (17) und (13) folgt

$$-\frac{h-1}{g} \leq \eta - \sum_{i=1}^h \underline{d}(\sigma_i^{(g)}) = \eta - \underline{d}(\sigma_1^{(g)}, \dots, \sigma_h^{(g)}) \leq \eta - \underline{d}(\sigma_1, \dots, \sigma_h) \leq \eta - \underline{d}(\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_h)$$

sowie $g \leq \frac{h-1}{\underline{d}(\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_h) - \eta}$. Zusammen mit (12i*) ergibt dies

$$\frac{\sum_{i=1}^h |\sigma_i|_g - h + 1}{\eta} \leq g \leq \frac{h-1}{\underline{d}(\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_h) - \eta}. \text{ Auflösen nach } \sum_{i=1}^h |\sigma_i|_g$$

führt zu

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^h |\sigma_i|_g &\leq \eta \frac{h-1}{\underline{d}(\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_h) - \eta} + h - 1 = \frac{h\eta - \eta + (h-1) \underline{d}(\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_h) - h\eta + \eta}{\underline{d}(\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_h) - \eta} = \\ &= \frac{(h-1) \underline{d}(\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_h)}{\underline{d}(\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_h) - \eta} = \frac{h-1}{1 - \frac{\eta}{\underline{d}(\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_h)}}; \end{aligned}$$

damit ist die Abschätzung von $\sum_{i=1}^h |\sigma_i|_g$ nach oben in (12ii*) gezeigt. Wegen (11i*), das heißt $0 \in \sigma_i$ und $G.G.T.(\sigma_i) = 1$, muß $\sigma_i^{(g)}$ wegen $g \geq 2$ neben der Restklasse $\{0\}^{(g)}$ eine weitere, von $\{0\}^{(g)}$ verschiedene Restklasse enthalten; also gilt $|\sigma_i|_g \geq 2$ und es folgt die untere Abschätzung von $\sum_{i=1}^h |\sigma_i|_g$ in (12ii*).

Wir zeigen nun, daß mit $\{\sigma_1, \dots, \sigma_h\}$ auch $\{\sigma_1^{(g)}, \dots, \sigma_h^{(g)}\}$ die an Elemente von $\mathcal{E}^*(h, \eta, n)$ gestellten Bedingungen (10i) bis (10iv) erfüllen. Wegen $\sigma_i \in \mathcal{N}$ und $\sigma_i \subset \sigma_i^{(g)}$ für $i=1, \dots, h$ erfüllt $\sigma_1^{(g)}, \dots, \sigma_h^{(g)}$ die Bedingung (10i). Wegen (15) und folglich $d(\sum_{i=1}^h \sigma_i^{(g)}) = d(\sum_{i=1}^h \sigma_i) \leq \eta$ erfüllt $\sigma_1^{(g)}, \dots, \sigma_h^{(g)}$ die Bedingung (10ii).

Annahme: $\sum_{i=1}^h \sigma_i^{(g)}$ sei nicht η -diskret. Dann existieren zwei Elemente a und b aus $\sum_{i=1}^h \sigma_i^{(g)}$ mit $|a-b| < n$. Da $\sum_{i=1}^h |\sigma_i|_g$ mit a und b auch $\{a\}^{(g)}$ und $\{b\}^{(g)}$ enthält, sind für beliebiges j auch $a+jg$ und $b+jg$ in $\sum_{i=1}^h \sigma_i^{(g)}$. Wenn j groß genug gewählt wird, folgt mit (15) und (1), daß $a+jg$ und $b+jg$ auch in $\sum_{i=1}^h \sigma_i$ liegen. Dies führt wegen $|(a+jg) - (b+jg)| = |a-b| < n$ zu dem Widerspruch, daß $\sum_{i=1}^h \sigma_i$ nicht η -diskret ist und $\{\sigma_1, \dots, \sigma_h\} \notin \mathcal{E}^*(h, \eta, n)$. Also muß

$\sum_{i=1}^h \sigma_i^{(g)}$ die Bedingung (10iii) erfüllen. Da offensichtlich $d(\sigma_1, \dots, \sigma_h) \leq d(\sigma_1^{(g)}, \dots, \sigma_h^{(g)})$ ist, gilt (10iv) mit $\sigma_1, \dots, \sigma_h$ auch für $\sigma_1^{(g)}, \dots, \sigma_h^{(g)}$. Damit ist $(\sigma_1^{(g)}, \dots, \sigma_h^{(g)}) \in \mathcal{E}^*(h, \eta, n)$ gezeigt.

Hilfssatz 2* Sei (h, η, n) gegeben. Erfüllen $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_h$ die Voraussetzungen von Hilfssatz 1* und gilt

$$d(\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_h) = \frac{\sum_{i=1}^h |\sigma_i|_g}{g} \quad \text{für } \{\sigma_1, \dots, \sigma_h\} \in \mathcal{E}^*(h, \eta, n),$$

so ist auch $\{\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_h\} \in \mathcal{E}^*(h, \eta, n)$.

Beweis. Mit (11i*) bis (11iv*) erfüllen $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_h$ die Bedingungen

(10i) bis (10iii); wegen $\underline{d}(\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_h) = \frac{\sum_{i=1}^h |\alpha_i|_g}{g} = \sum_{i=1}^h \underline{d}(\alpha_i^{(g)}) = \underline{d}(\alpha_1^{(g)}, \dots, \alpha_h^{(g)})$ auch (10iv).

Hilfssatz 3. Seien m und $n \geq 2$, ferner m_1 und t durch $m = nt + m_1$ sowie $1 \leq m_1 \leq n$ gegeben. Es gilt:

a) Aus $h \geq 2$ und $\alpha_i \in \mathcal{N}$ für $i=1, \dots, h$ sowie $\sum_{i=1}^h \alpha_i^{(m)}$ ist n -diskret

folgt $|\sum_{i=1}^h \alpha_i|_m \leq t$.

b) Aus $h \geq 2$ und $\alpha \in \mathcal{N}$ sowie $h\alpha^{(m)}$ ist n -diskret folgt $|h\alpha|_m \leq t$.

c) Für alle a mit $(a, m) = 1$ ist $t\{0, a\}^{(m)}$ nicht n -diskret.

Beweis a). Da $\sum_{i=1}^h \alpha_i^{(m)}$ eine n -diskrete Menge ist, gilt $\underline{d}(\sum_{i=1}^h \alpha_i^{(m)}) \leq \frac{1}{n}$ und somit auch $|\sum_{i=1}^h \alpha_i|_m = m \underline{d}(\sum_{i=1}^h \alpha_i^{(m)}) \leq \frac{m}{n} \leq \frac{nt+m_1}{n} \leq t+1$.

Annahme: Es sei $|\sum_{i=1}^h \alpha_i|_m = t+1$. Dann existieren $0 \leq a_0 < a_1 < \dots < a_t < m$ mit $\sum_{i=1}^h \alpha_i^{(m)} = \bigcup_{i=0}^t \{a_i\}^{(m)}$. Weil $\alpha_i \in \mathcal{N}$ gefordert wurde, muß $0 \in \sum_{i=1}^h \alpha_i$ und $a_0 = 0$

gelten. Wegen der n -Diskretheit von $\sum_{i=1}^h \alpha_i^{(m)}$ folgt $a_{i+1} \geq a_i + n$, insbesondere $a_i \geq in$, wegen $\{0\}^{(m)} = \{m\}^{(m)}$ auch $nt + m_1 - n \geq a_t \geq nt$.

Weil nach Voraussetzung $m_1 \leq n$ gilt, ist letztere Ungleichung nur für $m_1 = n$ nicht leer. Dies bedeutet $m = nt + m_1 = (t+1)n$ sowie $a_t = nt$.

Nun können aber $t+1$ Zahlen, die mindestens den Abstand n voneinander haben sollen, auf das Intervall $[0, nt]$ nur verteilt werden, indem man $a_i = in$ für $i=0, 1, \dots, t$ wählt. Also muß $\sum_{i=1}^h \alpha_i^{(m)} = \bigcup_{i=0}^t \{a_i\}^{(m)} = \bigcup_{i=0}^t \{in\}^{(m)}$ gelten. Da $\alpha_i \in \mathcal{N}$, das heißt $0 \in \alpha_i$ gefordert wurde, folgt weiter

$\alpha_i \subset \sum_{i=1}^h \alpha_i \subset \bigcup_{i=1}^h \{in\}^{(m)}$, also $\text{G.G.T.}(\alpha_i) \geq n$. Dies führt aufgrund der Voraussetzungen $n \geq 2$ und $\text{G.G.T.}(\alpha_i) = 1$ zu einem Widerspruch.

Die Behauptung folgt aus der Ganzzahligkeit von $|\sum_{i=1}^h \alpha_i|_m$.

Beweis b). Für $\alpha_1 = \dots = \alpha_h = \alpha$ in a) folgt die Behauptung.

Beweis c). Sei $\alpha = \{0, a\}^{(m)}$ gesetzt. Wegen $(a, m) = 1$ durchläuft ia mit i ein volles Restsystem modulo m , wegen $t \leq m$ besteht folglich die Menge $t\{0, a\}^{(m)} = \bigcup_{0 \leq i < t} \{ia\}^{(m)}$ aus $t+1$ verschiedenen Restklassen zum Modul m ; damit ist $|t\alpha|_m = |t\{0, a\}^{(m)}|_m = t+1$ gezeigt. Nach Teil b) kann also $t\{0, a\}^{(m)}$ nicht n -diskret sein.

Es ist uns nun möglich, in einem speziellen Fall extrem dichte Mengen anzugeben.

Satz 2. Sei (h, η, n) mit $\frac{h+1}{(h+1)n+1} \leq \eta < 1$ gegeben.
 Für $\mathcal{L}_i := \mathcal{L}_1 = \dots = \mathcal{L}_h := \{0, n\}^{((h+1)n+1)}$ folgt $\{\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_h\} \in \mathcal{E}^*(h, \eta, n)$
 und $\mathcal{L} \in \mathcal{E}(h, \eta, n)$.

Beweis. Da n -diskrete Mengen höchstens die Dichte $\frac{1}{n}$ besitzen,

kann

$$\eta \leq \frac{1}{n}$$

vorausgesetzt werden. Wir betrachten $\{\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_h\}$,

aus $(n, (h+1)n+1) = 1$ folgt $\mathcal{L}_i \in \mathcal{N}$ für $i=1, \dots, h$; mit (18) und $\eta < 1$ ist

$$\eta < \frac{2h}{(h+1)n+1} = d(\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_h)$$

erfüllt; wegen $\sum_{i=1}^h \mathcal{L}_i = \{0, n, \dots, hn\}^{((h+1)n+1)}$ gilt weiter

$$d\left(\sum_{i=1}^h \mathcal{L}_i\right) = \frac{h+1}{(h+1)n+1} \leq \eta \text{ sowie } \sum_{i=1}^h \mathcal{L}_i \text{ ist } n\text{-diskret. Also sind die}$$

Voraussetzungen von Hilfssatz 1* erfüllt, und es existieren ein $g \geq 2$

und $\{\alpha_1, \dots, \alpha_h\} \in \mathcal{E}^*(h, \eta, n)$ mit (12i*) bis (12iii*); unter

Berücksichtigung von (18) und (19) gelten insbesondere

$$n\left(\sum_{i=1}^h |\alpha_i|_g - h+1\right) \leq g \leq \frac{(h+1)n+1}{2h} \sum_{i=1}^h |\alpha_i|_g$$

und

$$|\alpha_i|_g \geq 2 \quad \text{für } i=1, \dots, h$$

sowie nach Multiplikation der Ungleichung (4) mit g ferner

$$(21) \quad \sum_{i=1}^h |\alpha_i|_g - h + 1 \leq \left| \sum_{i=1}^h \alpha_i \right|_g.$$

Fall 1. Sei zunächst $n \geq 2$ gewählt.

Annahme: Es gelte $\sum_{i=1}^h |\alpha_i|_g \geq 2h+1$. Unter Beachtung von $n+1-hn < 0$

und damit $(n+1-hn) \sum_{i=1}^h |\alpha_i|_g \leq (n+1-hn)(2h+1)$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{(h+1)n+1}{2h} \sum_{i=1}^h |\alpha_i|_g - n \left(\sum_{i=1}^h |\alpha_i|_g - h + 1 \right) &= \frac{n+1-hn}{2h} \sum_{i=1}^h |\alpha_i|_g + hn - n \leq \\ &\leq \frac{n+1-hn}{2h} (2h+1) + hn - n = 1 + \frac{n+1-hn}{2h} < 1, \end{aligned}$$

wegen der Ganzzahligkeit von g folgt mit (20) daraus

$$(22) \quad n \left(\sum_{i=1}^h |\alpha_i|_g - h + 1 \right) = g.$$

wir können also $g = n \left(\sum_{i=1}^h |\alpha_i|_g - h \right) + n$ schreiben. Nun liefern

Hilfssatz 3a und (21) den Widerspruch $\sum_{i=1}^h |\alpha_i|_g - h + 1 \leq \left| \sum_{i=1}^h \alpha_i \right|_g \leq \sum_{i=1}^h |\alpha_i|_g - h$.

Also gilt $\sum_{i=1}^h |\alpha_i|_g = 2h$ bzw. $|\alpha_i|_g = 2$ für $i=1, \dots, h$.

Einsetzen in (20) ergibt $n(h+1) \leq g \leq n(h+1)+1$. Genau wie aus (22)

erfolgt im Falle $g = n(h+1)$ ein Widerspruch. Damit ist $g = (h+1)n + 1$ gezeigt.

Fall 2. Sei $n=1$. Wir müssen $\eta < 1$ berücksichtigen. (12.)* ergibt

$$\sum_{i=1}^h |\alpha_i|_g - h + 2 \leq g \leq \frac{h+2}{2h} \sum_{i=1}^h |\alpha_i|_g.$$

Letztere Ungleichung wird nur für $\sum_{i=1}^h |\alpha_i|_g = 2h$ erfüllt. Es gilt

$$g = h+2 = (h+1)n + 1.$$

$$\text{Damit ist in beiden Fällen } d(\alpha_1, \dots, \alpha_h) = \frac{2h}{(h+1)n+1} = d(\alpha_1, \dots, \alpha_h)$$

gezeigt. Wegen $\alpha_1 = \dots = \alpha_h$ folgt mit Hilfssatz 2 bzw. 2* die

Behauptung.

Ehe wir für $\eta < \frac{1}{n}$ ein $\alpha \in \mathcal{E}(h, \eta, n)$ bestimmen können, benötigen wir weitere Hilfsbetrachtungen. Der Fall $\eta < \frac{1}{n}$ und $\{\alpha_1, \dots, \alpha_h\} \in \mathcal{E}^*(h, \eta, n)$ wird in § 4 behandelt.

Hilfssatz 4. Seien h, m, n gegeben. Ist für ein t sowohl $h < t < \frac{m}{n}$, als auch $(m, n, t) = 1$ erfüllt, folgt die Existenz eines a mit $(a, m) = 1$ und $h\{0, a\}^{(m)}$ ist n -diskret.

Beweis. Wir setzen

$$m_0 := m - nt.$$

Nach der Definition von $S_t(m_0)$ gilt $(\frac{m_0}{S_t(m_0)}, t) = 1$. Folglich⁴⁾

durchläuft $it-1$ mit i ein volles Restsystem modulo $\frac{m_0}{S_t(m_0)}$.

Es existiert demnach ein i_0 , das $1 \leq i_0 \leq \frac{m_0}{S_t(m_0)}$ und $\frac{i_0 t - 1}{\frac{m_0}{S_t(m_0)}} \in \mathbb{N}$.

erfüllt. Für $a := \frac{i_0 t - 1}{\frac{m_0}{S_t(m_0)}} n + i_0 S_t(m_0)$ gilt dann $a = \frac{i_0 t - 1}{\frac{m_0}{S_t(m_0)}} n + i_0 \frac{m_0}{S_t(m_0)} =$

$$= \frac{i_0 m - n}{\frac{m_0}{S_t(m_0)}} = \frac{i_0 t m - nt}{\frac{m_0}{S_t(m_0)} t} = \frac{(i_0 t - 1)m + m_0}{\frac{m_0}{S_t(m_0)} t} = \frac{\frac{i_0 t - 1}{\frac{m_0}{S_t(m_0)}} m + S_t(m_0)}{t}.$$

Wir erhalten $a = \frac{i_0 m - n}{\frac{m_0}{S_t(m_0)}} = \frac{\frac{i_0 t - 1}{\frac{m_0}{S_t(m_0)}} m + S_t(m_0)}{t}$, wegen der

Ganzzahligkeit von $\frac{i_0 t - 1}{\frac{m_0}{S_t(m_0)}}$ auch

4) Vgl. Hardy und Wright [3] Satz 56.

$$(23) \quad \frac{m_0}{s_t(m_0)} a \equiv -n \pmod{m} \quad \text{und} \quad ta \equiv s_t(m_0) \pmod{m}.$$

Dies führt zu $(a, m) | n$ bzw. $(a, m) | s_t(m_0)$ und folglich $(a, m) | (n; s_t(m_0))$. Wegen $(m_0, n, t) = (m, n, t) = 1$ nach Voraussetzung, ferner $s_t(m_0) | (m_0, t)^l$ für ein geeignetes l , folgt⁵⁾ $(n, s_t(m_0)) = 1$ sowie $(a, m) = 1$.

Elemente von $h\{0, a\}^{(m)}$ können wir für geeignete r und s durch $ra + sm$ bezeichnen. Sei nun $h\{0, a\}^{(m)}$ nicht n -diskret. Dann existieren in $h\{0, a\}^{(m)}$ zwei Zahlen $r_1 a + s_1 m$ und $r_2 a + s_2 m$ mit $|(r_2 - r_1)a + (s_2 - s_1)m| < n$ bzw. $-n < (r_2 - r_1)a + (s_2 - s_1)m < n$ und

$$(24) \quad 0 \leq r_2 - r_1 < r_2 \leq h.$$

wegen $(n, s_t(m_0)) = 1$ existieren eindeutig bestimmte ganze Zahlen l_1 und l_2 , die $(r_2 - r_1)a + (s_2 - s_1)m = l_1 s_t(m_0) - l_2 n$ sowie $1 \leq l_1 \leq n$ erfüllen⁶⁾. Aus (23) folgt $(l_1 t + l_2 \frac{m_0}{s_t(m_0)})a \equiv l_1 s_t(m_0) - l_2 n \pmod{m}$, damit also

$$(25) \quad r_2 - r_1 \equiv l_1 t + l_2 \frac{m_0}{s_t(m_0)} \pmod{m}.$$

Weiterhin gilt $-n < l_1 s_t(m_0) - l_2 n < n$ genau für $\frac{l_1 s_t(m_0) - n}{n} < l_2 < \frac{l_1 s_t(m_0) + n}{n}$.

Wegen $1 \leq l_1 \leq n$ und der Ganzzahligkeit von l_2 bedeutet letzteres

$$0 \leq l_2 \leq s_t(m_0); \quad \text{wir erhalten} \quad t \leq l_1 t + l_2 \frac{m_0}{s_t(m_0)} \leq nt + m_0 = m.$$

Mit (25) folgt $(r_2 - r_1) \leq 0$ oder $(r_2 - r_1) \geq t$, aus (24) andererseits $1 \leq r_2 - r_1 \leq h$.

Zusammensetzen ergibt, daß $h\{0, a\}^{(m)}$ nur dann nicht n -diskret sein kann, wenn $t \leq r_2 - r_1 \leq h$ ist. Also folgt im Falle $h < t$ stets n -Diskretheit der Menge $h\{0, a\}^{(m)}$.

5) Sei p eine Primzahl. Aus $p | (n, s_t(m_0))$ folgt

$$p | s_t(m_0) | (m_0, t)^l, \quad \text{also} \quad p | (m_0, t) \quad \text{im Widerspruch zu} \quad (m_0, n, t) = 1.$$

6) Die Zahl l_2 kann negative Werte annehmen.

Hilfssatz 5. Seien $n \geq 2$ und m sowie m_1 und t durch $m = nt + m_1$ und $1 \leq m_1 \leq n$ gegeben. Im Falle ${}^{7)} (m, t) = n$ existiert kein a , das zugleich die beiden Aussagen

$$(26) \quad (t-1)\{0, a\}^{(m)} \text{ ist } n\text{-diskret} \quad \text{und} \quad (a, m) = 1$$

erfüllt.

Beweis. Wir nehmen an, es existiere ein a , für das (26) gilt. Hilfssatz 3c zufolge ist $t\{0, a\}^{(m)}$ nicht n -diskret. Weil a so gewählt werden kann, daß $na \leq m - n$ gilt, ist $t\{0, a\}^{(m)} = \{0, a, \dots, ta\}^{(m)}$ genau dann nicht n -diskret, wenn es ein Zahlenpaar (r, s) mit

$$(27) \quad 0 < |ra - sm| < n$$

und $1 \leq r \leq t$ gibt. Vgl. (24). Da andererseits für $r \leq t$ sowohl ra als auch sm in der nach Annahme n -diskreten Menge $(t-1)\{0, a\}^{(m)}$ liegen, muß $r=t$ gelten. Wegen $(m, t) = n$ ergibt dies $n \mid (ra - sm)$. Mit (27) folgt ein Widerspruch.

Wir sind nun in der Lage, in vielen Fällen Elemente aus $\mathcal{E}(h, \eta, n)$ anzugeben.

Satz 3. Sei (h, η, n) gegeben, ferner ein a mit

$$(28) \quad (a, \langle \frac{h+1}{\eta} \rangle) = 1 \quad \text{und} \quad h\{0, a\}^{(\langle \frac{h+1}{\eta} \rangle)} \text{ ist } n\text{-diskret.}$$

Nur im Falle $h=2$ und $\frac{5}{7} \leq \eta < \frac{3}{4}$ und $n=1$ folgt

$$(29) \quad \{0, 1, 2\}^{(7)} \in \mathcal{E}(h, \eta, n),$$

ansonsten gilt stets

$$(30) \quad \{0, a\}^{(\langle \frac{h+1}{\eta} \rangle)} \in \mathcal{E}(h, \eta, n).$$

⁷⁾ Stets gilt $(m, t) = (m_1, t) \leq m_1 \leq n$. Die Forderung $n \geq 2$ ist nötig, damit Hilfssatz 3 angewandt werden kann.

Beweis. Wir nehmen an, daß (28) erfüllt ist. Die Menge

$$\mathcal{L} := \{0, a\}^{\langle \frac{h+1}{\eta} \rangle} \text{ erfüllt wegen } \frac{\eta}{h} = \frac{2}{\frac{2h}{\eta}} < \frac{2}{\frac{h+1+\eta}{\eta}} < \frac{2}{\langle \frac{h+1}{\eta} \rangle} = \underline{d}(\mathcal{L}),$$

$$\text{ferner } hn + n \leq \frac{h+1}{\eta} \leq \langle \frac{h+1}{\eta} \rangle \quad \text{und folglich}$$

$$\text{wegen } h\mathcal{L} = \{0, n, \dots, hn\}^{\langle \frac{h+1}{\eta} \rangle} \quad \text{ist } n\text{-diskret,}$$

$$\underline{d}(h\mathcal{L}) = \frac{h+1}{\langle \frac{h+1}{\eta} \rangle} \leq \eta$$

und offensichtlich

$$\mathcal{L} \in \mathcal{N}$$

die Voraussetzungen von Hilfssatz 1. Demzufolge existieren ein $g \geq 2$

und ein $a \in \mathcal{E}(h, \eta, n)$ insbesondere mit

$$(31) \quad 2 \leq |a|_g \leq \frac{h-1}{h - \frac{\eta}{\underline{d}(\mathcal{L})}}$$

und

$$(32) \quad \frac{|a|_g - h + 1}{\eta} \leq g \leq \frac{|a|_g}{\underline{d}(\mathcal{L})}.$$

Wir zeigen nun, daß $\underline{d}(a) = \underline{d}(\mathcal{L})$ gilt.

Fall 1. Die Zahl $\langle \frac{h+1}{\eta} \rangle$ sei gerade. Wir definieren $z := \frac{1}{2} \langle \frac{h+1}{\eta} \rangle$.

Dann gilt $\frac{h+1}{\eta} \leq 2z < \frac{h+1}{\eta} + 1$ und wegen $z \geq \frac{h+1}{2} > 1$ auch

$$(33) \quad \frac{h+1}{2z} \leq \eta < \frac{h+1}{2z-1}.$$

Ferner ist

$$(34) \quad \underline{d}(\mathcal{L}) = \frac{2}{\langle \frac{h+1}{\eta} \rangle} = \frac{1}{z}.$$

Wegen $\frac{h+1}{2z} \leq \eta < 1$ tritt $\frac{h+1}{2} < z$ ein, wegen der Ganzzahligkeit

von z sogar $\frac{h+2}{2} \leq z$.

Folglich gilt

$$(h-1)z-h \geq \frac{(h-1)(h+2)}{2} - h = \frac{h^2+h-2-2h}{2} = \frac{h^2-h-2}{2} \geq 0;$$

wegen $|a|_g \geq 2$ können wir

$$\begin{aligned} z|a|_g - 1 &\leq z|a|_g - 1 + \frac{1}{h+1} ((h-1)z-h)(|a|_g-2) = \\ &= \frac{1}{h+1} ((h+1)z|a|_g - h - 1 + (h-1)z|a|_g - h|a|_g - 2(h-1)z + 2h) = \\ &= \frac{1}{h+1} (2hz|a|_g - h|a|_g - 2(h-1)z + h - 1) = \\ &= \frac{1}{h+1} (2z-1)(h|a|_g - h + 1) = \frac{h|a|_g - h + 1}{\frac{h+1}{2z-1}} \end{aligned}$$

(35)

abschätzen. Mit (32) bis (34) folgt

$$z|a|_g - 1 \leq \frac{h|a|_g - h + 1}{\frac{h+1}{2z-1}} < \frac{h|a|_g - h + 1}{\eta} \leq g \leq \frac{|a|_g}{d(x)} = z|a|_g.$$

Aufgrund der Ganzzahligkeit von g bedeutet dies $g = z|a|_g$

sowie $\underline{d}(a) = \frac{|a|_g}{g} = \frac{1}{z} = \underline{d}(x).$

Fall 2. Die Zahl $\langle \frac{h+1}{\eta} \rangle$ sei ungerade. Wir definieren $z := \frac{1}{2} \langle \frac{h+1}{\eta} \rangle - \frac{1}{2}$

Dann ist $2z+1 = \langle \frac{h+1}{\eta} \rangle$ sowie

$$(36) \quad \frac{h+1}{2z+1} \leq \eta < \frac{h+1}{2z} \quad \text{und} \quad \underline{d}(x) = \frac{2}{2z+1}.$$

Fall 2.1. Sei

$$(37) \quad z \geq \frac{h+1}{h-1}.$$

Aus (31) und (36) folgt

$$2 \leq |a|_g \leq \frac{h-1}{h - \frac{\eta}{d(\mathfrak{L})}} < \frac{h-1}{h - \frac{(h+1)(2\mathfrak{z}+1)}{4\mathfrak{z}}} = \frac{4\mathfrak{z}(h-1)}{4h\mathfrak{z} - 2h\mathfrak{z} - 2\mathfrak{z} - h - 1} =$$

$$= \frac{4\mathfrak{z}(h-1)}{2\mathfrak{z}(h-1) - (h+1)} = 2 + \frac{2(h+1)}{2\mathfrak{z}(h-1) - (h+1)}.$$

Mit (37) und folglich $\mathfrak{z}(h-1) \gg h+1$ gilt weiter

$$2 \leq |a|_g < 2 + \frac{2(h+1)}{2\mathfrak{z}(h-1) - (h+1)} \leq 2 + \frac{2(h+1)}{2(h+1) - (h+1)} = 4.$$

Annahme: Sei $|a|_g = 3$. Mit (37) und (36) können wir

$$3\mathfrak{z}+1 = 3\mathfrak{z} + \frac{(h+1)(h-1)}{(h-1)(h+1)} \leq 3\mathfrak{z} + \mathfrak{z} \frac{(h-1)}{(h+1)} = 2\mathfrak{z} + \mathfrak{z} \frac{h+1+h-1}{h+1} =$$

$$= 2\mathfrak{z} + 2\mathfrak{z} \frac{h}{h+1} = 2\mathfrak{z} \left(1 + \frac{h}{h+1}\right) = 2\mathfrak{z} \frac{2h+1}{h+1} = \frac{2h+1}{\frac{h+1}{2\mathfrak{z}}} < \frac{2h+1}{\eta}$$

abschätzen; aus (32) folgt

$$3\mathfrak{z}+1 < \frac{2h+1}{\eta} = \frac{h|a|_g - h+1}{\eta} \leq g \leq \frac{|a|_g}{d(\mathfrak{L})} = \frac{3}{2}(2\mathfrak{z}+1) = 3\mathfrak{z} + \frac{3}{2}$$

und ein Widerspruch zur Ganzzahligkeit von g . Also gilt $|a|_g = 2$.

Einsetzen in (32) ergibt $\frac{h+1}{\eta} \leq g \leq \left\langle \frac{h+1}{\eta} \right\rangle$ und $g = \left\langle \frac{h+1}{\eta} \right\rangle$.

Damit wurde $d(a) = \frac{|a|_g}{g} = \frac{2}{\left\langle \frac{h+1}{\eta} \right\rangle} = d(\mathfrak{L})$ gezeigt.

Fall 2.2. Sei $\mathfrak{z} < \frac{h+1}{h-1}$. Aufgrund der Ganzzahligkeit von $\mathfrak{z}$ gilt sogar $\mathfrak{z} \leq \frac{h}{h-1} \leq 1 + \frac{1}{h-1} \leq 2$. Wegen $h \geq 2$ und damit

$9h-3 \leq 10h-5 \leq 5h^2-5$ folgt aus (28) und (36) die Ungleichung

$$(38) \quad \frac{3}{5} \leq \frac{h^2-1}{3h-1} = \frac{h+1}{\frac{2h}{h-1} + 1} \leq \frac{h+1}{2\mathfrak{z}+1} \leq \eta \leq \frac{1}{\mathfrak{z}}.$$

Da für $n \geq 2$ nicht $\frac{3}{5} \leq \frac{1}{n}$, für $h \geq 3$ oder $z \leq 1$ nicht $\frac{3}{5} \leq \frac{h+1}{2z+1}$ gilt, führt (38) zu einem Widerspruch. Also ist

$$h=2 \text{ und } n=1 \text{ und } z=2.$$

Mit (36) liefert dies $\frac{3}{5} \leq \eta < \frac{3}{4}$.

Fall 2.2.1. Sei $\frac{3}{5} \leq \eta < \frac{5}{7}$. Einsetzen von $\underline{d}(\mathcal{L}) = \frac{2}{\left\langle \frac{h+1}{\eta} \right\rangle} = \frac{2}{5}$ und der oberen Schranke von η in (31) führt zu $2 \leq |\alpha|_g \leq \frac{h-1}{h - \frac{\eta}{\underline{d}(\mathcal{L})}} < \frac{1}{2 - \frac{5 \cdot 5}{7 \cdot 2}} < 5$.

Wir betrachten nun die drei möglichen Werte für $|\alpha|_g$.

Ist $|\alpha|_g = 4$, so folgt aus (32) die Abschätzung

$$g < \frac{7}{\frac{5}{7}} < \frac{h|\alpha|_g - h + 1}{\eta} \leq g \leq \frac{|\alpha|_g}{\underline{d}(\mathcal{L})} = 10,$$

$$\text{also } g=10 \text{ und } \frac{|\alpha|_g}{g} = \frac{4}{10} = \underline{d}(\mathcal{L}).$$

Für $|\alpha|_g = 3$ folgt zur Ganzzahligkeit von g aus (32) der Widerspruch

$$7 = \frac{5}{\frac{7}{7}} < \frac{h|\alpha|_g - h + 1}{\eta} \leq g \leq \frac{|\alpha|_g}{\underline{d}(\mathcal{L})} = \frac{15}{2} < 8.$$

Entsprechend folgt für $|\alpha|_g = 2$, daß $g=5$ und damit $\frac{|\alpha|_g}{g} = \frac{2}{5} = \underline{d}(\mathcal{L})$

gilt. Da aus $|\alpha|_g = 2$ und $|\alpha|_g = 4$ jeweils $\frac{|\alpha|_g}{g} = \underline{d}(\mathcal{L})$, aus $|\alpha|_g = 3$ ein

Widerspruch folgt, muß $\underline{d}(\alpha) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} = \underline{d}(\mathcal{L})$ eintreten.

Fall 2.2.2. Sei $\frac{5}{7} \leq \eta < \frac{3}{4}$. Wir betrachten hier $\mathcal{L}_1 := \{0, 1, 2\}^{(7)}$.

Es gilt $\underline{d}(\mathcal{L}_1) = \frac{3}{7}$. Entsprechend wie für $\mathcal{L}$ können wir zeigen, daß auch $\mathcal{L}_1$ die Voraussetzungen von Hilfssatz 1 erfüllt, also für $\mathcal{L}_1$ an Stelle von $\mathcal{L}$ die Ungleichungen (31) und (32) gelten. Ähnlich

Fall 2.2.1. führt Einsetzen von $\underline{d}(\mathcal{L}_1)$ und der oberen Schranke von η in (31) zu $2 \leq |\alpha|_g \leq 3$. Für $|\alpha|_g = 2$ liefert (32) den Widerspruch $4 < g < 5$. Für $|\alpha|_g = 3$ führt (32) zu $g=7$. Also tritt $\underline{d}(\alpha) = \frac{|\alpha|_g}{g} = \frac{3}{7} = \underline{d}(\mathcal{L}_1)$ ein.

Damit ist in jedem Fall $\underline{d}(\mathcal{L}) = \underline{d}(\alpha)$ oder $\underline{d}(\mathcal{L}_1) = \underline{d}(\alpha)$ gezeigt. Mit Hilfssatz 2 folgt, daß $\mathcal{L}$ bzw. $\mathcal{L}_1$ alle an eine Menge aus $\mathcal{E}(h, \eta, n)$ gestellten Bedingungen erfüllen. Also sind (29) und (30) gezeigt.



Satz 3 entnehmen wir

Folgerung 2. Ist für ein t sowohl $h < t < \frac{\langle \frac{h+1}{\eta} \rangle}{n}$ als auch

$(\langle \frac{h+1}{\eta} \rangle, n, t) = 1$ erfüllt, folgt die Existenz eines a mit $\{0, a\}^{\langle \frac{h+1}{\eta} \rangle} \in \mathcal{E}(h, \eta, n)$, ausgenommen im Falle $h=2$ und $\frac{5}{7} \leq \eta < \frac{3}{4}$ und $n=1$.

Beweis. Die Behauptung folgt direkt aus Hilfssatz 4 und

Satz 3.



Folgerung 3. Existiert ein a mit $(a, \langle \frac{h+1}{\eta} \rangle) = 1$ und

$n \leq a \leq \frac{\langle \frac{h+1}{\eta} \rangle - n}{h}$, so ist $\{0, a\}^{\langle \frac{h+1}{\eta} \rangle} \in \mathcal{E}(h, \eta, n)$, ausgenommen im Falle $h=2$ und $\frac{5}{7} \leq \eta < \frac{3}{4}$ und $n=1$.

8) Die Ungleichung $h < t < \frac{\langle \frac{h+1}{\eta} \rangle}{n}$ ist für $\eta < \frac{1}{n}$ wegen $\frac{\langle \frac{h+1}{\eta} \rangle}{n} > \frac{h+1}{\eta n} > h+1$

nie leer. Gleichwohl muß es ein t wegen der zweiten Bedingung nicht geben.

Beweis. Aus $n \leq a \leq \frac{\langle \frac{h+1}{\eta} \rangle - n}{h}$ folgt offensichtlich $h a \leq \langle \frac{h+1}{\eta} \rangle - n$

und damit $h\{0, a\}^{(\langle \frac{h+1}{\eta} \rangle)}$ ist n -diskret. Mit Satz 3 folgt die Behauptung.



Wir notieren zwei Beispiele, die zeigen, daß die Folgerungen 2 und 3 einander ergänzen.

a) Sei $h=4$ und $\eta = \frac{1}{12}$ und $n=10$ gewählt. Es gilt $\langle \frac{h+1}{\eta} \rangle = 60$ sowie

$$\frac{\langle \frac{h+1}{\eta} \rangle}{n} = 6. \quad \text{Da dies } t=5 \text{ und } (\langle \frac{h+1}{\eta} \rangle, n, t) = 5 \text{ liefert, sind die}$$

Voraussetzungen von Folgerung 2 nicht erfüllt. Andererseits kann

Folgerung 3 angewandt werden, da sich für $a=11$ sowohl $(a, \langle \frac{h+1}{\eta} \rangle) = 1$

als auch $n \leq a \leq \frac{\langle \frac{h+1}{\eta} \rangle - n}{h}$ ergibt.

b) Für $h=6$ und $\eta = \frac{7}{60}$ und $n=8$ muß $a=8$ in Folgerung 3 eintreten, was

zu $(a, \langle \frac{h+1}{\eta} \rangle) = 4$ führt. Für $t=7$ sind jedoch in diesem Beispiel die

Voraussetzungen von Folgerung 2 erfüllt.

Folgerung 4. Sei $n=1$. Im Falle $h=2$ und $\frac{5}{7} \leq \eta < \frac{3}{4}$ gilt $\{0, 1, 2\}^{(7)} \in \mathcal{E}(h, \eta, n)$. Ansonsten ist $\{0, 1\}^{(\langle \frac{h+1}{\eta} \rangle)} \in \mathcal{E}(h, \eta, n)$.

Folgerung 5. Aus $\eta \notin [\frac{5}{7}, \frac{3}{4})$ und $\alpha \in \mathcal{E}(h, \eta, n)$ folgt $d(\alpha) \leq \frac{2}{\langle \frac{h+1}{\eta} \rangle}$.

Beweis. α ist sicher 1-diskret. Folgerung 4 ergibt $d(\alpha) \leq \frac{2}{\langle \frac{h+1}{\eta} \rangle}$.



Vgl. Folgerung 1.

Folgerung 6. Sei $L \in \mathcal{N}$. Im Falle $h=2$ und $\frac{5}{7} \leq \eta < \frac{3}{4}$ folgt aus $\underline{d}(L) > \frac{3}{7}$, ansonsten aus $\underline{d}(L) > \frac{2}{\langle \frac{h+1}{\eta} \rangle}$ die Gültigkeit von $\underline{d}(hL) > \eta$.

Bemerkung. Ist $\tilde{f}$ keine asymptotische Basis der Ordnung h , jedoch $\tilde{f} \cup \{f\}$, so heißt $\tilde{f}$ maximale asymptotische Nichtbasis der Ordnung h , kurz maximale Nichtbasis. Es stellt sich nun die Frage, wann extrem dichte Mengen $\mathcal{O}$ maximale Nichtbasen sind.

Wir beschränken uns auf die Betrachtung des Falles $\mathcal{O} = \{0, 1\}^{\langle \frac{h+1}{\eta} \rangle}$ und h ungerade. Vgl. Folgerung 4.

Wird $\bar{\mathcal{O}} := \mathcal{O} \cup \{a\}$ gesetzt, wobei $a \notin \mathcal{O}$ sei, folgt

$$\begin{aligned} h\bar{\mathcal{O}} &= \bigcup_{i=0}^h (ia + (h-i)\{0, 1\}^{\langle \frac{h+1}{\eta} \rangle}) = \bigcup_{i=0}^h (ia + \{0, 1, \dots, h-i\}^{\langle \frac{h+1}{\eta} \rangle}) = \\ &= \bigcup_{i=0}^h \{ia, \dots, ia+h-i\}^{\langle \frac{h+1}{\eta} \rangle}. \end{aligned}$$

Die Menge $h\bar{\mathcal{O}} \cap [j\langle \frac{h+1}{\eta} \rangle, (j+1)\langle \frac{h+1}{\eta} \rangle - 1]$

besteht folglich für beliebiges j aus $h+1$ Intervallen. Aus

$\tilde{ia} - 1 \leq (\tilde{i}-1)a + h - (\tilde{i}-1)$ folgt $\tilde{i} \leq h+2-a$. Demnach ist

$n_h(a) := (h+2-a)a + h - (h+2-a) + 1 = (h+3)a - a^2 - 1$ das kleinste Element in $\mathbb{N}$,

das nicht in $h\bar{\mathcal{O}}$ liegt. Differenzieren von $n_h(\xi)$ nach ξ zeigt, daß

$n_h(\xi)$ für $\xi = \frac{h+3}{2}$ ein Maximum annimmt. Ist h ungerade und somit $\frac{h+3}{2} \in \mathbb{N}$,

folgt $h\bar{\mathcal{O}} \cap \mathbb{N}_0$ aus $\langle \frac{h+1}{\eta} \rangle \leq n_h(\frac{h+3}{2}) = \frac{h^2+6h+5}{4}$ bzw. $\frac{4}{h+5} \leq \eta$.

Somit erhalten wir für $\eta \geq \frac{4}{h+5}$ und ungerade h , daß die in Folgerung 4

angegebenen extrem dichten Mengen maximale Nichtbasen sind.

Folgerung 1 können wir entnehmen, daß für maximale Nichtbasen

$\tilde{f}$ stets $\underline{d}(\tilde{f}) \leq \frac{2}{h+2}$ gelten muß.

Vgl. Nathanson [6] Satz 7. Vgl. auch die Reichweite einer dreielementigen Menge bei Stöhr [10].

Unter Benützung von Folgerung 2 werden in Satz 4 Elemente aus $\mathcal{E}(h, \eta, n)$ für Primzahlen n bestimmt.

Satz 4. Sei $h \geq 2$ und n eine Primzahl und ⁹⁾ $\eta < \frac{1}{n}$.

Aus $h=2$ und $\frac{5}{19} \leq \eta < \frac{3}{11}$ und $n=3$ folgt

$$(39) \quad \{0, 3, 6\}^{(19)} \in \mathcal{E}(h, \eta, n).$$

Aus $h=3$ und $\frac{7}{16} \leq \eta < \frac{4}{9}$ und $n=2$ folgt

$$(40) \quad \{0, 2, 9\}^{(16)} \in \mathcal{E}(h, \eta, n).$$

Ansonsten existiert für $h \equiv -1 \pmod{n}$ und $\frac{h+1}{(h+2)n} \leq \eta < \frac{h+1}{(h+2)n-1}$

ein a mit

$$(41) \quad \{0, a\}^{\left(\left\langle \frac{h+1}{\eta} \right\rangle + 1\right)} \in \mathcal{E}(h, \eta, n).$$

In allen anderen Fällen existiert ein a mit

$$(42) \quad \{0, a\}^{\left(\left\langle \frac{h+1}{\eta} \right\rangle\right)} \in \mathcal{E}(h, \eta, n).$$

Beweis. Zum Nachweis von (42) betrachten wir zunächst den

Fall $\left(\left\langle \frac{h+1}{\eta} \right\rangle, n, h+1\right) = 1$. Für

$$m := \left\langle \frac{h+1}{\eta} \right\rangle$$

und $t = h+1$ gilt (42) nach Folgerung 2. Im Falle ¹⁰⁾

$$(43) \quad \left(\left\langle \frac{h+1}{\eta} \right\rangle, n, h+1\right) = n$$

folgt $\left(\left\langle \frac{h+1}{\eta} \right\rangle, n, h+2\right) = 1$. Für $\left\langle \frac{h+1}{\eta} \right\rangle > n(h+2)$ können wir erneut

9) Der Fall $\eta < \frac{1}{n}$ ist in Satz 2 enthalten.

10) Weil n eine Primzahl ist, wird n nur von 1 und n geteilt.

Folgerung 2 anwenden; also existiert ein a , für das (42) gilt.

Ist dagegen $\left\langle \frac{h+1}{\eta} \right\rangle \leq n(h+2)$, das heißt $\frac{h+1}{n(h+2)} \leq \eta < \frac{1}{n}$,

so folgt $n(h+1)+1 \leq m = \left\langle \frac{h+1}{\eta} \right\rangle \leq n(h+2)$. Offensichtlich¹⁰⁾

wird Forderung (43) nur für

$$(44) \quad m = \left\langle \frac{h+1}{\eta} \right\rangle = n(h+2) \quad \text{bzw.} \quad \frac{h+1}{n(h+2)} \leq \eta < \frac{h+1}{n(h+2)-1} = \frac{h+1}{m-1}$$

und

$$(45) \quad h \equiv -1 \pmod{n}$$

erfüllt. Eine triviale Folgerung aus (44) ist

$$(46) \quad m \geq 2h+4.$$

Anwendung von Hilfssatz 5 besagt, daß kein $\alpha \in \mathcal{E}(h, \eta, n)$ mit¹¹⁾

$|\alpha|_g = 2$ und $g = \left\langle \frac{h+1}{\eta} \right\rangle$ existiert; wegen Folgerung 5 bedingt $|\alpha|_g = 2$

also stets

$$(47) \quad g > \left\langle \frac{h+1}{\eta} \right\rangle.$$

Zum Beweis von (41) betrachten wir nun $\mathcal{L} := \{0, n\}^{\left(\left\langle \frac{h+1}{\eta} \right\rangle + 1\right)}$.

wegen $\underline{d}(h\mathcal{L}) = \frac{h+1}{\left\langle \frac{h+1}{\eta} \right\rangle + 1} \langle \eta \rangle$, wegen¹²⁾ $\eta < \frac{h+1}{m-1} = \frac{2h}{\frac{2h}{h+1}(m-1)}$ =

$$= \frac{2h}{m-1 + \frac{(h-1)(m-1)}{h+1}} \leq \frac{2h}{m-1 + \frac{m-1}{h+1}} < \frac{2h}{m-1+2} = h \underline{d}(\mathcal{L}),$$

11) Jedes $\alpha \in \mathcal{E}(h, \eta, n)$ muß insbesondere die Eigenschaften (10i) und (10iii) besitzen.

12) Vgl. (44) und (46).

wegen $h\mathbb{Z} = \{0, n, \dots, hn\}^{(n(h+2)+1)}$ ist n -diskret und $(n, \langle \frac{h+1}{\eta} \rangle + 1) = 1$

auch $\mathbb{Z} \in \mathcal{N}$ existieren Hilfssatz 1 zufolge ein $g \geq 2$ und ein

$\alpha \in \mathcal{E}(h, \eta, n)$ insbesondere mit

$$(48) \quad \frac{h|\alpha|_g - h + 1}{\eta} \leq g \leq \frac{|\alpha|_g}{d(\mathbb{Z})} = \frac{|\alpha|_g}{2} \left(\left\langle \frac{h+1}{\eta} \right\rangle + 1 \right) = \frac{|\alpha|_g}{2} (m+1)$$

sowie

$$(49) \quad 2 \leq |\alpha|_g \leq \frac{h-1}{h - \frac{\eta}{d(\mathbb{Z})}} = \frac{h-1}{h - \frac{\eta}{2}(m+1)}$$

Im Falle

$$(50) \quad \eta < \frac{2(2h+1)}{3(m+1)-1}$$

führt letztere Ungleichung zu

$$\begin{aligned} 2 \leq |\alpha|_g &< \frac{h-1}{h - \frac{2(2h+1)(m+1)}{(3(m+1)-1)2}} = \frac{3(h-1)(m+1) - (h-1)}{3h(m+1) - h - (2h+1)(m+1)} = \\ &= \frac{3(h-1)(m+1) - (h-1)}{(h-1)(m+1) - h} = 3 + \frac{2h+1}{(h-1)(m+1) - h} \quad ; \text{Verwendung von (46) ergibt} \end{aligned}$$

$$2 \leq |\alpha|_g \leq 3 + \frac{2h+1}{(h-1)(2h+5) - h} = 3 + \frac{2h+1}{2h^2 + 2h - 5} < 4,$$

das heißt $|\alpha|_g = 2$ oder ¹³⁾ $|\alpha|_g = 3$.

Aus $|\alpha|_g = 2$ und (48) folgt $\frac{h+1}{\eta} \leq g \leq \left\langle \frac{h+1}{\eta} \right\rangle + 1$,

13) Hilfssatz 1 besagt, daß ein $\alpha \in \mathcal{E}(h, \eta, n)$ mit (48) und (49) existiert, nicht aber, daß jedes α , das (48) und (49) erfüllt, in $\mathcal{E}(h, \eta, n)$ liegt.

wegen (47) weiter $g = \left\langle \frac{h+1}{\eta} \right\rangle + 1$ und $\frac{101g}{g} = \frac{2}{\left\langle \frac{h+1}{\eta} \right\rangle + 1} = \underline{d}(\mathcal{L})$.

Analog folgt aus $101g=3$ und (48) die Ungleichung

$$\frac{3}{2}(m+1) - \frac{1}{2} = \frac{2h+1}{\frac{2(2h+1)}{3(m+1)-1}} < \frac{2h+1}{\eta} \leq g \leq \frac{3}{2}(m+1),$$

wegen der Ganzzahligkeit von g entweder ein Widerspruch oder

$$g = \frac{3}{2}(m+1) \text{ und } \frac{101g}{g} = \frac{3}{\frac{3}{2}(m+1)} = \underline{d}(\mathcal{L}).$$

Es bleiben (39) und (40) beziehungsweise ¹⁴⁾

$$(51) \quad \frac{2(2h+1)}{3(hn+2n+1)-1} \leq \eta < \frac{h+1}{n(h+2)-1}$$

zu betrachten. Man prüft leicht nach, daß diese Ungleichung nur

für ¹⁵⁾ $h \leq 3$ erfüllt werden kann. Sei zunächst $h=2$ gewählt. Weil n eine Primzahl ist, folgt $n=3$ aus (45), mit (51) weiter $\eta < \frac{3}{11}$.

Für $\mathcal{L}_4 := \{0, 3, 6\}$ ⁽¹⁹⁾ existieren wegen $\underline{d}(2\mathcal{L}_4) = \frac{5}{19} \leq \eta$, wegen

$$\eta < \frac{3}{11} < \frac{6}{19} = 2\underline{d}(\mathcal{L}_4), \text{ wegen } 2\mathcal{L}_4 \text{ ist 3-diskret und offensichtlich}$$

$\mathcal{L}_4 \in \mathcal{N}$ nach Hilfssatz 1 ein $g \geq 2$ und ein $\alpha \in E(h, \eta, n)$ insbesondere mit

$$(52) \quad \frac{22 \cdot 101g - 11}{3} < \frac{2 \cdot 101g - 1}{\eta} \leq g \leq \frac{101g}{3} \cdot 19$$

¹⁴⁾ Vgl. (44) und (50).

¹⁵⁾ Nach Voraussetzung gilt $h \geq 2$.

und $2 \leq |a|_g < \frac{1}{2 - \frac{3 \cdot 19}{11 \cdot 3}} = \frac{11}{22-19} < 4$. Für $|a|_g = 2$ führt (52) zu

$11 < g < 13$; mit (44) folgt $g = 12 = (h+2)n = \left\langle \frac{h+1}{\eta} \right\rangle$ im Widerspruch zu (47).

Also kann nur $|a|_g = 3$, mit (52) ferner $g = 19$ gelten.

Damit ist $\frac{|a|_g}{g} = \frac{3}{19} = d(\mathfrak{A}_1)$, mit Hilfssatz 2 auch (39) gezeigt.

Im Falle $h=3$ folgt $n=2$ aus (45), mit (51) auch $\eta < \frac{4}{g}$.

Für $\mathfrak{A}_2 := \{0, 2, 9\}^{(16)}$ sind unter anderem wegen $3\mathfrak{A}_2 = \{0, 2, 4, 6, 9, 11, 13\}^{(16)}$

ist 2-diskret die Voraussetzungen von Hilfssatz 1 erfüllt, und es existieren ein $g \geq 2$ und ein $\alpha \in \mathcal{E}(h, \eta, n)$ insbesondere mit

(53)

$$\frac{27|a|_g - 18}{4} < \frac{3|a|_g - 2}{\eta} \leq g \leq \frac{16}{3}|a|_g$$

sowie $2 \leq |a|_g < \frac{2}{3 - \frac{4 \cdot 16}{9 \cdot 3}} < 4$. Für $|a|_g = 2$ folgt $g = 10 = (h+2)n = \left\langle \frac{h+1}{\eta} \right\rangle$

aus (53) und (44) im Widerspruch zu (47). Also kann nur $|a|_g = 3$,

wegen (53) ferner $g = 16$ gelten. Damit ist $\frac{|a|_g}{g} = \frac{3}{16} = d(\mathfrak{A}_2)$, folglich (40) gezeigt.



Bemerkung. Sei p eine Primzahl und $l \geq 1$, ferner $\alpha \in \mathcal{E}(h, \eta, n)$.

Ist (h, η, n) mit

$$n = p^l$$

gegeben, existiert im allgemeinen ein a , so daß $\alpha = \{0, a\}^{(\left\langle \frac{h+1}{\eta} \right\rangle)}$

gewählt werden kann. Ausnahmen sind nach Folgerung 2 und dem Beweis

von Satz 4 nur für $p \mid \left\langle \frac{h+1}{\eta} \right\rangle, p^l, h+1$ bzw. $\frac{h+1}{n(h+2)} < \eta < \frac{1}{n}$, folglich

$$(54) \quad h \equiv -1 \pmod{p}$$

und

$$(55) \quad \frac{h+1}{n(h+1)+pj} \leq \eta < \frac{h+1}{n(h+1)+pj-1}$$

im Falle $1 \leq j \leq p^{l-1}$ möglich; da jedoch $(\langle \frac{h+1}{\eta} \rangle, p^l, h+1) = 1$

oder $(\langle \frac{h+1}{\eta} \rangle + 1, p^l, h+1) = 1$ gilt, erhalten wir

$$\frac{2}{\langle \frac{h+1}{\eta} \rangle + 1} \leq d(\alpha) \leq \frac{2}{\langle \frac{h+1}{\eta} \rangle}$$

aus den Folgerungen 2 und 5. Wir beachten, daß aus (54) und (55)

wegen $\langle \frac{h+1}{\eta} \rangle = n(h+1) + pj = np \frac{h+1}{p} + pj$ also

$$\langle \frac{h+1}{\eta} \rangle \equiv pj \pmod{p^{l+1}} \quad \text{für } 1 \leq j \leq \frac{n}{p}$$

folgt.

§ 4. Bestimmung extrem dichter Mengensysteme

Im Folgenden übertragen wir die Aussagen des § 3 über Mengen aus $\mathcal{E}(h, \eta, n)$ auf Systeme von Mengen aus $\mathcal{E}^*(h, \eta, n)$.

In vielen Fällen kann $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = \alpha \in \mathcal{E}(h, \eta, n)$ gewählt werden; vgl. Satz 2; Ausnahmen finden sich unter anderem für

$$h \equiv -1 \pmod{m} \quad \text{und} \quad \frac{h+1}{(h+2)n} \leq \eta < \frac{h+1}{(h+2)n-1}.$$

Zunächst beschränken wir uns auf den Fall $n=1$. Es folgen dazu einige Hilfsüberlegungen.

Hilfssatz 6. Sei $(h, \eta, n=1)$ gegeben. Wenn

$$(56) \quad \mu := \max \left\{ \frac{x+h-1}{y} \mid \frac{x}{y} \leq \eta \text{ und } x > h \right\}$$

existiert, ist es gleich $\frac{2h+q-1}{\left\langle \frac{h+q}{\eta} \right\rangle}$ für ein $q \geq 1$, und durch

$$\mathcal{L}_1 := \dots := \mathcal{L}_{h-1} := \{0, 1\}^{\left\langle \frac{h+q}{\eta} \right\rangle} \text{ sowie } \mathcal{L}_h := \{0, 1, \dots, q\}^{\left\langle \frac{h+q}{\eta} \right\rangle}$$

wird ein $\{\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_h\} \in \mathcal{E}^*(h, \eta, n)$ definiert.

Beweis. Wir nehmen an, das Maximum existiere. In (56) muß

wegen $\frac{x}{y} \leq \eta$ sicher $y \geq \left\langle \frac{x}{\eta} \right\rangle$ gelten. Da andererseits $\frac{x+h-1}{y}$ maximal für minimales y ist, gilt

$$\max \left\{ \frac{x+h-1}{\left\langle \frac{x}{\eta} \right\rangle} \mid x > h \right\} = \mu.$$

Für $\tilde{q} := x-h$ folgt die Existenz von q mit $\frac{2h+q-1}{\left\langle \frac{h+q}{\eta} \right\rangle} = \mu.$

$$\text{Da } d\left(\sum_{i=1}^h \mathcal{L}_i\right) = d(\{0, 1, \dots, q+h-1\}^{\left\langle \frac{h+q}{\eta} \right\rangle}) = \frac{h+q}{\left\langle \frac{h+q}{\eta} \right\rangle} \leq \eta,$$

$$\text{ferner } d(\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_h) = \sum_{i=1}^h d(\mathcal{L}_i) = \frac{2(h-1)+q+1}{\left\langle \frac{h+q}{\eta} \right\rangle} = \frac{2h+q-1}{\left\langle \frac{h+q}{\eta} \right\rangle} \geq \frac{h+q+1}{\left\langle \frac{h+q}{\eta} \right\rangle}$$

und offensichtlich $\frac{h+q+1}{\left\langle \frac{h+q}{\eta} \right\rangle} > \eta$ gilt, tritt für $\{\alpha_1, \dots, \alpha_h\} \in \mathcal{E}^*(h, \eta, n)$

$$\text{nun } \frac{2h+q-1}{\left\langle \frac{h+q}{\eta} \right\rangle} = d(\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_h) \leq d(\alpha_1, \dots, \alpha_h) \leq d\left(\sum_{i=1}^h \alpha_i\right) \leq \eta < \frac{h+q+1}{\left\langle \frac{h+q}{\eta} \right\rangle}$$

ein. Also existiert nach dem Resultat von Kneser ein g mit

$$(57) \quad \frac{2h+q-1}{\left\langle \frac{h+q}{\eta} \right\rangle} = d(x_1, \dots, x_h) \leq d(\alpha_1^{(g)}, \dots, \alpha_h^{(g)}) \leq d\left(\sum_{i=1}^h \alpha_i^{(g)}\right) + \frac{h-1}{g}.$$

Für ein s ist $d\left(\sum_{i=1}^h \alpha_i^{(g)}\right) = d\left(\sum_{i=1}^h \alpha_i\right) = \frac{s}{g} \leq \eta$ erfüllt; nach (56) muß

dann $\frac{s+h-1}{g} \leq \frac{2h+q-1}{\left\langle \frac{h+q}{\eta} \right\rangle}$ sein. Mit (57) ergibt dies

$$\frac{2h+q-1}{\left\langle \frac{h+q}{\eta} \right\rangle} \leq d(\alpha_1^{(g)}, \dots, \alpha_h^{(g)}) \leq \frac{s+h-1}{g} \leq \frac{2h+q-1}{\left\langle \frac{h+q}{\eta} \right\rangle}.$$

Wir erhalten also

$$(58) \quad d(\alpha_1, \dots, \alpha_h) = \frac{2h+q-1}{\left\langle \frac{h+q}{\eta} \right\rangle} = d(x_1, \dots, x_h).$$

Weil die $x_1, \dots, x_h$ die Voraussetzungen von Hilfssatz 1* erfüllen, liefern (58) und Hilfssatz 2* nun $\{x_1, \dots, x_h\} \in \mathcal{E}^*(h, \eta, n)$.

■

Es bleibt, q aus Hilfssatz 6 zu bestimmen.

Bemerkung. Für $i \geq 1$ gilt ¹⁶⁾

$$(59) \quad \left\langle \frac{h+i}{\eta} \right\rangle \geq \left\langle \frac{h+1}{\eta} \right\rangle + \left[\frac{1}{\eta} \right] (i-1).$$

Sei $k^* \geq 1$ gewählt, so daß

$$(60) \quad \left\langle \frac{h+k^*}{\eta} \right\rangle = \left\langle \frac{h+1}{\eta} \right\rangle + \left[\frac{1}{\eta} \right] (k^*-1)$$

gilt ¹⁷⁾. Für

$$(61) \quad \eta \left[\frac{1}{\eta} \right] < \frac{h+1}{2h} \quad \text{und} \quad k^* \geq i$$

kann $(k^*-i) \left\langle \frac{h+1}{\eta} \right\rangle \geq 2h \left[\frac{1}{\eta} \right] (k^*-i)$, also auch

16) Beide Seiten der Ungleichung (59) sind $< \frac{h+i}{\eta} + 1$.

17) Gleichung (60) ist z.B. für $k^*=1$ erfüllt.

$$(k^* - i) \left\langle \frac{h+1}{\eta} \right\rangle \geq (2h+i-1) \left[\frac{1}{\eta} \right] (k^* - 1) - (2h+k^*-1) \left[\frac{1}{\eta} \right] (i-1)$$

und schließlich

$$(2h+k^*-1) \left(\left\langle \frac{h+1}{\eta} \right\rangle + \left[\frac{1}{\eta} \right] (i-1) \right) \geq (2h+i-1) \left(\left\langle \frac{h+1}{\eta} \right\rangle + \left[\frac{1}{\eta} \right] (k^*-1) \right)$$

abgeschätzt werden. Mit (59) und (60) unter Voraussetzung (61) folgt

$$(62) \quad \frac{2h+k^*-1}{\left\langle \frac{h+k^*}{\eta} \right\rangle} \geq \frac{2h+i-1}{\left\langle \frac{h+i}{\eta} \right\rangle}.$$

Somit muß in Hilfssatz 6 also $q \geq \max \{k^* | \left\langle \frac{h+k^*}{\eta} \right\rangle = \left\langle \frac{h+1}{\eta} \right\rangle + \left[\frac{1}{\eta} \right] (k^*-1)\}$

gelten. Nun folgt mit (59) aber

$$\begin{aligned} k &:= \max \{k^* | \left\langle \frac{h+k^*}{\eta} \right\rangle = \left\langle \frac{h+1}{\eta} \right\rangle + \left[\frac{1}{\eta} \right] (k^*-1)\} = \\ &= \max \{k^* | \frac{h+k^*}{\eta} \leq \left\langle \frac{h+1}{\eta} \right\rangle + \left[\frac{1}{\eta} \right] (k^*-1)\} = \\ &= \max \{k^* | k^* \leq \frac{\left\langle \frac{h+1}{\eta} \right\rangle \eta - h - \left[\frac{1}{\eta} \right] \eta}{1 - \left[\frac{1}{\eta} \right] \eta}\} = \left[\frac{\left\langle \frac{h+1}{\eta} \right\rangle \eta - h - \left[\frac{1}{\eta} \right] \eta}{1 - \left[\frac{1}{\eta} \right] \eta} \right]. \end{aligned}$$

Mit (61) und (62) ist gezeigt, daß

$$(63) \quad q \geq k \quad \text{und} \quad \left\langle \frac{h+q}{\eta} \right\rangle \geq \left\langle \frac{h+k}{\eta} \right\rangle$$

in Hilfssatz 6 eintreten muß. Man prüft leicht nach¹⁸⁾, daß

$$k = \left[\frac{\left\langle \frac{h+1}{\eta} \right\rangle \eta - h - \left[\frac{1}{\eta} \right] \eta}{1 - \left[\frac{1}{\eta} \right] \eta} \right] \quad \text{genau dann gilt, wenn}$$

18) Nach Definition von k ist $\left\langle \frac{h+k}{\eta} \right\rangle = \left\langle \frac{h+1}{\eta} \right\rangle + \left[\frac{1}{\eta} \right] (k-1)$.

(64)

$$\frac{h+k}{\left\langle \frac{h+k}{\eta} \right\rangle} \leq \eta < \frac{h+k+1}{\left\langle \frac{h+k}{\eta} \right\rangle + \left[\frac{1}{\eta} \right]}$$

ist. In Satz 5 wird gezeigt, daß $q=k$ in (63) aus $\eta \left[\frac{1}{\eta} \right] < \frac{h+1}{2h}$

folgt. Vgl. (61).

Für ein $g \gg 2$ gelte nun $\{\alpha_1^{(g)}, \dots, \alpha_h^{(g)}\} \in \mathcal{E}^*(h, \eta, n)$.

Wenn in (56) das Maximum existiert, muß demnach

$$\frac{\sum_{i=1}^h |\alpha_i|_g}{g} = \frac{2h+g-1}{\left\langle \frac{h+g}{\eta} \right\rangle}$$

für ein geeignetes g gelten, obigen Überlegungen zufolge für

$\left[\frac{1}{\eta} \right] \eta < \frac{h+1}{2h}$ ferner

$$\frac{\sum_{i=1}^h |\alpha_i|_g}{g} \geq \frac{2h+k-1}{\left\langle \frac{h+k}{\eta} \right\rangle}.$$

Mit (62) ergibt dies ¹⁹⁾ $g > \left\langle \frac{h+k}{\eta} \right\rangle$ und $\sum_{i=1}^h |\alpha_i|_g \geq 2h+k-1$.

Im Falle $\left[\frac{1}{\eta} \right] \eta < \frac{h+1}{2h}$ erhalten wir ergänzend zu Hilfssatz 1* die

Ungleichungen

(65)

$$\left\langle \frac{h+k}{\eta} \right\rangle \leq g \quad \text{und} \quad 2h+k-1 \leq \sum_{i=1}^h |\alpha_i|_g.$$

19) Wegen $2h \leq \sum_{i=1}^h |\alpha_i|_g$ in (12ii*) muß $\left\langle \frac{h+1}{\eta} \right\rangle \leq g$ in (12i*) gelten.

Satz 5. Seien (h, η) und $\eta=1$ gegeben. Für

$$(66) \quad k := \begin{cases} \left\lfloor \frac{\langle \frac{h+1}{\eta} \rangle \eta - h - [\frac{1}{\eta}] \eta}{1 - [\frac{1}{\eta}] \eta} \right\rfloor & \text{für } \eta[\frac{1}{\eta}] < \frac{h+1}{2h}, \\ 1 & \text{sonst,} \end{cases}$$

ist dann durch

$$\mathcal{L}_i := \dots := \mathcal{L}_{h-1} := \{0, 1\}^{\langle \frac{h+k}{\eta} \rangle} \quad \text{und} \quad \mathcal{L}_h := \{0, 1, \dots, k\}^{\langle \frac{h+k}{\eta} \rangle}$$

ein $\{\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_h\} \in \mathcal{E}^*(h, \eta, n)$ gegeben.

Der Beweis erfolgt mit Hilfe von Fallunterscheidungen entsprechend der tabellarischen Übersicht am Ende des Beweises.

Beweis.

Fall 1. Seien (h, η) mit $\eta[\frac{1}{\eta}] \geq \frac{h+1}{2h}$ gegeben.

Weil $\langle \frac{h+r}{\eta} \rangle$ die größte ganze Zahl $< \frac{h+r}{\eta} + 1$ ist, ferner

$$\langle \frac{h+1}{\eta} \rangle + [\frac{1}{\eta}](r-1) < \frac{h+r}{\eta} + 1 \text{ gilt, folgt}$$

$$(67) \quad \langle \frac{h+r}{\eta} \rangle \geq \langle \frac{h+1}{\eta} \rangle + [\frac{1}{\eta}](r-1).$$

Aus der Voraussetzung $\eta[\frac{1}{\eta}] \geq \frac{h+1}{2h}$ erhalten wir zunächst $[\frac{1}{\eta}]2h \geq \frac{h+1}{\eta}$,

wegen der Ganzzahligkeit der linken Seite der Ungleichung $[\frac{1}{\eta}]2h \geq \langle \frac{h+1}{\eta} \rangle$,

für $r \geq 1$ auch $\frac{r-1}{[\frac{1}{\eta}](r-1)} \leq \frac{2h}{\langle \frac{h+1}{\eta} \rangle}$. Weil allgemein aus $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$ stets

$\frac{a+c}{b+d} \leq \frac{c}{d}$ folgt, haben wir mit (67) die für $r=1$ triviale Aussage

$$(68) \quad \frac{2h+r-1}{\langle \frac{h+r}{\eta} \rangle} \leq \frac{2h}{\langle \frac{h+1}{\eta} \rangle} + \frac{(r-1)}{[\frac{1}{\eta}](r-1)} \leq \frac{2h}{\langle \frac{h+1}{\eta} \rangle} \quad \text{für alle } r \geq 1$$

und folglich auch

$$\frac{2h}{\left\langle \frac{h+1}{\eta} \right\rangle} = \max \left\{ \frac{2h+r-1}{\left\langle \frac{h+r}{\eta} \right\rangle} \mid r \geq 1 \right\} \text{ gezeigt.}$$

Mit Hilfssatz 6 tritt wie behauptet $q=k=1$ ein.

Fall 2. Sei $\eta \left[\frac{1}{\eta} \right] < \frac{h+1}{2h}$. Aus $1 < \left[\frac{1}{\eta} \right] \eta + \eta$ erhalten wir

$$(69) \quad \frac{1}{\left[\frac{1}{\eta} \right] + 1} < \eta < \frac{h+1}{2h \left[\frac{1}{\eta} \right]} \text{ bzw. } 2h \left[\frac{1}{\eta} \right] < (h+1) \left[\frac{1}{\eta} \right] + h+1.$$

Für $\left[\frac{1}{\eta} \right] = 1$ folgt $\eta \in \left(\frac{1}{2}, \frac{h+1}{2h} \right)$. Im Falle $\left[\frac{1}{\eta} \right] \geq 2$ ist (69) nur für

$\left[\frac{1}{\eta} \right] = 2$ und $h=2$, das heißt $\frac{1}{3} < \eta < \frac{3}{8}$ erfüllt. Damit ist gezeigt,

daß für $\eta \left[\frac{1}{\eta} \right] < \frac{h+1}{2h}$ nur $\eta \in \left(\frac{1}{2}, \frac{h+1}{2h} \right)$ oder $h=2$ und $\eta \in \left(\frac{1}{3}, \frac{3}{8} \right)$

eintreten kann. Es erfolgt weitere Fallunterscheidung bezüglich η . Wir betrachten

$$\frac{1}{2} < \eta < \frac{h+2}{\left\langle \frac{h+1}{\eta} \right\rangle + 1} \quad \text{in Fall 2.1, sodann}$$

$$\frac{1}{2} < \frac{h+2}{\left\langle \frac{h+1}{\eta} \right\rangle + 1} \leq \eta < \frac{h+1}{2h} \quad \text{für } h \geq 3 \text{ oder } \eta < \frac{3}{5} \text{ in Fall 2.2, schließlich}$$

$$\frac{1}{3} < \eta < \frac{3}{8} \text{ oder } \frac{3}{5} \leq \eta < \frac{3}{4} \text{ für } h=2 \text{ in Fall 2.3.}$$

Wie im Beweis zu Hilfssatz 6 gezeigt wurde, erfüllen die in Satz 5 definierten Mengen $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_h$ die Voraussetzungen von Hilfssatz 1*. Unter Berücksichtigung von (65) existieren also

ein g und $\{\alpha_1, \dots, \alpha_h\} \in \Xi^*(h, \eta, n)$, für die mit (64) insbesondere

$$(70) \quad \frac{\sum_{i=1}^h |\alpha_i|_g - h + 1}{h + k + 1} \left(\left\langle \frac{h+k}{\eta} \right\rangle + \left[\frac{1}{\eta} \right] \right) < g \leq \frac{\sum_{i=1}^h |\alpha_i|_g}{2h + k - 1} \left\langle \frac{h+k}{\eta} \right\rangle \quad \text{und} \quad \left\langle \frac{h+k}{\eta} \right\rangle \leq g$$

sowie

$$(71) \quad 2h + k - 1 \leq \sum_{i=1}^h |\alpha_i|_g \leq \frac{h-1}{1 - \frac{\eta}{2h+k-1} \left\langle \frac{h+k}{\eta} \right\rangle}$$

gilt.

Fall 2.1. Sei $\frac{1}{2} < \eta < \frac{h+2}{\left\langle \frac{h+1}{\eta} \right\rangle + 1}$. Aus (66) folgt $k=1$. Somit

ergibt (71) nun

$$\begin{aligned} 2h &\leq \sum_{i=1}^h |\alpha_i|_g \leq \frac{h-1}{1 - \frac{\eta}{2h} \left\langle \frac{h+1}{\eta} \right\rangle} < \frac{h-1}{1 - \frac{(h+2) \left\langle \frac{h+1}{\eta} \right\rangle}{(\left\langle \frac{h+1}{\eta} \right\rangle + 1) 2h}} = \\ &= \frac{2h^2 \left\langle \frac{h+1}{\eta} \right\rangle + 2h^2 - 2h \left\langle \frac{h+1}{\eta} \right\rangle - 2h}{h \left\langle \frac{h+1}{\eta} \right\rangle - 2 \left\langle \frac{h+1}{\eta} \right\rangle + 2h} = 2h + 2 + \frac{4 \left\langle \frac{h+1}{\eta} \right\rangle - 2h^2 - 6h}{(h-2) \left\langle \frac{h+1}{\eta} \right\rangle + 2h}. \end{aligned}$$

Wegen $\eta > \frac{1}{2}$ folgt $(h-2) \left\langle \frac{h+1}{\eta} \right\rangle - 8h - 2h^2 \leq (h-2)(2h+2) - 8h - 2h^2 =$

$$= 12 + 2h - 4h^2 \leq 12 - 6h \leq 0, \quad \text{also auch} \quad \frac{4 \left\langle \frac{h+1}{\eta} \right\rangle - 2h^2 - 6h}{(h-2) \left\langle \frac{h+1}{\eta} \right\rangle + 2h} \leq 1.$$

Somit ist

$$(72) \quad 2h \leq \sum_{i=1}^h |\alpha_i|_g \leq 2h + 2$$

gezeigt.

Wegen $\eta > \frac{1}{2}$ folgt für $1 < r \leq 3 \leq h+1$ ferner

$$2hr \geq 2hr - 2h + 2r - 2 \geq (r-1)(2h+2) \geq (r-1) \left\langle \frac{h+1}{\eta} \right\rangle \quad \text{bzw.}$$

$$2h \left\langle \frac{h+1}{\eta} \right\rangle + 2hr \geq 2h \left\langle \frac{h+1}{\eta} \right\rangle + (r-1) \left\langle \frac{h+1}{\eta} \right\rangle \quad \text{sowie}$$

$$\frac{2h}{\left\langle \frac{h+1}{\eta} \right\rangle} \geq \frac{2h+r-1}{\left\langle \frac{h+1}{\eta} \right\rangle + r} \geq \frac{2h+r-1}{\left\langle \frac{h+r}{\eta} \right\rangle}.$$

Da für $r > k$ nach der Definition von k stets

$$\left\langle \frac{h+r}{\eta} \right\rangle \geq \left\langle \frac{h+1}{\eta} \right\rangle + \left[\frac{1}{\eta} \right] (r-1) \quad \text{nach der Bemerkung zu Hilfssatz 6}$$

ist, überdies $\left[\frac{1}{\eta} \right] = 1$, kann weiter $\frac{2h}{\left\langle \frac{h+1}{\eta} \right\rangle} \geq \frac{2h+r-1}{\left\langle \frac{h+1}{\eta} \right\rangle + r} \geq \frac{2h+r-1}{\left\langle \frac{h+r}{\eta} \right\rangle}$ für $r > k$

abgeschätzt werden. Aus (72) und Hilfssatz 6 folgt die Behauptung.

Fall 2.2. Sei $\frac{1}{2} < \frac{h+2}{\left\langle \frac{h+1}{\eta} \right\rangle + 1} < \eta < \frac{h+1}{2h}$ für $h \geq 3$ oder $\eta < \frac{3}{5}$.

Insbesondere gilt $\left[\frac{1}{\eta} \right] = 1$ und $h+2-\eta < \left\langle \frac{h+1}{\eta} \right\rangle \eta < h+1+\eta$. Der linke

Teil der Ungleichung führt zu $\frac{\left\langle \frac{h+1}{\eta} \right\rangle \eta - h - \left[\frac{1}{\eta} \right] \eta}{1 - \left[\frac{1}{\eta} \right] \eta} \geq \frac{2-2\eta}{1-\eta} = 2,$

der rechte wegen $\eta < \frac{2}{3}$ zu $\frac{\left\langle \frac{h+1}{\eta} \right\rangle \eta - h - \left[\frac{1}{\eta} \right] \eta}{1 - \left[\frac{1}{\eta} \right] \eta} < \frac{1+\eta-\eta}{1-\eta} < 3.$

Damit ist $k=2$ gezeigt. Wegen $\eta < \frac{h+1}{\langle \frac{h+1}{\eta} \rangle - 1}$ und $\eta < \frac{h+1}{2h}$ bzw. $2h+1 \leq \langle \frac{h+1}{\eta} \rangle$

ergibt (71) im Falle $h \geq 3$ nun

$$\begin{aligned} 2h+1 \leq \sum_{i=1}^h |a_i|_g &< \frac{h-1}{1 - \frac{(h+1) (\langle \frac{h+1}{\eta} \rangle + 1)}{(\langle \frac{h+1}{\eta} \rangle - 1) (2h+1)}} = \frac{h-1}{1 - \frac{h+1}{2h+1} \left(1 + \frac{2}{\langle \frac{h+1}{\eta} \rangle - 1} \right)} \leq \\ &\leq \frac{h-1}{1 - \frac{h+1}{2h+1} \left(1 + \frac{2}{(2h+1)-1} \right)} = \frac{h-1}{1 - \frac{(h+1)(h+1)}{(2h+1)h}} = \frac{(h-1)h(2h+1)}{h(2h+1) - (h+1)^2} = \\ &= \frac{2h^3 - h^2 - h}{h^2 - h - 1} = 2h+1 + \frac{2h+1}{h^2 - h - 1} < 2h+3, \end{aligned}$$

im Falle $h=2$ und $\eta < \frac{3}{5}$ wegen $\langle \frac{h+1}{\eta} \rangle \leq 2h+2$ und $k=2$, mit (71) also

$$5 \leq \sum_{i=1}^h |a_i|_g < \frac{1}{1 - \frac{3}{5} \langle \frac{h+2}{\eta} \rangle} \leq \frac{1}{1 - \frac{3}{5} (\langle \frac{h+1}{\eta} \rangle + 1)} = \frac{1}{1 - \frac{21}{25}} < 7,$$

damit ebenfalls $2h+1 \leq \sum_{i=1}^h |a_i|_g < 2h+3$.

Nach Hilfssatz 6 folgt die Behauptung mit $4h+1 > 2h+2 > \langle \frac{h+1}{\eta} \rangle$, also

$$\frac{2h+1}{\langle \frac{h+2}{\eta} \rangle} = \frac{2h+1}{\langle \frac{h+1}{\eta} \rangle + 1} > \frac{2h+2}{\langle \frac{h+1}{\eta} \rangle + 3} \geq \frac{2h+2}{\langle \frac{h+3}{\eta} \rangle}.$$

Vgl. (59) und $k = \max \left\{ k^* \mid \left\langle \frac{h+k^*}{\eta} \right\rangle = \left\langle \frac{h+1}{\eta} \right\rangle + \left[\frac{1}{\eta} \right] (k^* - 1) \right\}$

in der Bemerkung zu Hilfssatz 6.

Fall 2.3. Sei $h=2$ mit $\frac{1}{3} < \eta < \frac{3}{8}$ oder $\frac{3}{5} \leq \eta < \frac{3}{4}$. Die Ungleichungen

(70) und (71) werden zu

$$(73) \quad \frac{\sum_{i=1}^2 |a_i|_g^{-1}}{3+k} \left(\left\langle \frac{2+k}{\eta} \right\rangle + \left[\frac{1}{\eta} \right] \right) < g \leq \frac{\sum_{i=1}^2 |a_i|_g}{3+k} \left\langle \frac{2+k}{\eta} \right\rangle \text{ und } \left\langle \frac{2+k}{\eta} \right\rangle \leq g$$

sowie wegen (64) auch

$$(74) \quad 3+k \leq \sum_{i=1}^2 |a_i|_g < \frac{1}{1 - \frac{\left\langle \frac{h+k}{\eta} \right\rangle (3+k)}{(3+k) \left(\left\langle \frac{2+k}{\eta} \right\rangle + \left[\frac{1}{\eta} \right] \right)}} = \frac{1}{1 - \frac{\left\langle \frac{3}{\eta} \right\rangle + \left[\frac{1}{\eta} \right] (k-1)}{\left\langle \frac{3}{\eta} \right\rangle + \left[\frac{1}{\eta} \right] k}} = \frac{\left\langle \frac{3}{\eta} \right\rangle}{\left[\frac{1}{\eta} \right]} + k$$

Sowohl für $\frac{1}{3} < \eta < \frac{3}{8}$, was $\left\langle \frac{3}{\eta} \right\rangle = 9$ und $\left[\frac{1}{\eta} \right] = 2$ bedeutet, als auch

für $\frac{3}{5} \leq \eta < \frac{3}{4}$, was $\left\langle \frac{3}{\eta} \right\rangle = 5$ und $\left[\frac{1}{\eta} \right] = 1$ bedeutet, ergibt (74) nun

$$\sum_{i=1}^2 |a_i|_g \leq 4+k \quad ; \text{ Einsetzen von } \sum_{i=1}^2 |a_i|_g = 4+k \text{ in (73) liefert}$$

$$\left[\frac{1}{\eta} \right] + \left\langle \frac{2+k}{\eta} \right\rangle < g \leq \left\langle \frac{2+k}{\eta} \right\rangle + \left\langle \frac{2+k}{\eta} \right\rangle \frac{1}{3+k} < \left\langle \frac{2+k}{\eta} \right\rangle + \frac{1}{\eta}$$

im Widerspruch zur Ganzzahligkeit von g . Also muß $\sum_{i=1}^2 |a_i|_g = 3+k$

gelten. Aus (73) folgt $g = \left\langle \frac{h+k}{\eta} \right\rangle$, mit Hilfssatz 2* die Behauptung.

Damit ist Satz 5 bewiesen. Wir fassen in einer tabellarischen Übersicht die Fallunterscheidungen des Beweises zusammen. -

$h=2$	η	$0 < \eta \leq \frac{1}{3}$	$\frac{1}{3} < \eta < \frac{3}{8}$	$\frac{3}{8} \leq \eta \leq \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} < \eta < \frac{4}{7}$	$\frac{4}{7} \leq \eta < \frac{3}{5}$	$\frac{3}{5} \leq \eta < \frac{3}{4}$	$\frac{3}{4} \leq \eta < 1$
	Fall	1	2.3	1	2.1	2.2	2.3	1
$h \geq 3$	η	$0 < \eta \leq \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \leq \eta < \frac{h+2}{2h+3}$	$\frac{h+2}{2h+3} \leq \eta < \frac{h+1}{2h+1}$	$\frac{h+1}{2h+1} \leq \eta < \frac{h+2}{2h+2}$	$\frac{h+2}{2h+2} \leq \eta < \frac{h+1}{2h}$	$\frac{h+1}{2h} \leq \eta < 1$	
	Fall	1	2.1	2.2	2.1	2.2	1	

Ähnlich, aber schwächer als analoge Resultate für
Schnirelmann- Dichten von Chinčîn [4] und Mann [5] lautet

Folgerung 7. Ist $\alpha_i \in \mathcal{N}$ für $i=1, \dots, h$, so gilt

$$\min(1, \frac{h+1}{2h} \underline{d}(\alpha_1, \dots, \alpha_h)) \leq \underline{d}(\sum_{i=1}^h \alpha_i).$$

Beweis. Sei $\underline{d}(\sum_{i=1}^h \alpha_i) < 1$. Wir definieren $\eta := \underline{d}(\sum_{i=1}^h \alpha_i)$ sowie $n := 1$

und wählen $\{\alpha_1, \dots, \alpha_h\} \in \mathcal{E}^*(h, \eta, n)$ wie in Satz 5 angegeben. Es gilt

$$\frac{h+1}{2h} \underline{d}(\alpha_1, \dots, \alpha_h) \leq \frac{h+1}{2h} \underline{d}(\alpha_1, \dots, \alpha_h) = \frac{(h+1)(2h+k-1)}{2h \left\langle \frac{h+k}{\eta} \right\rangle}.$$

Wegen $k-1 \leq (k-1)h$, also auch $h+k-1 \leq hk$ und somit

$$(h+1)(2h+k-1) = h+k-1 + (2h^2+hk) \leq hk + (2h^2+hk) = 2h(h+k)$$

können wir weiter $\frac{(h+1)(2h+k-1)}{2h \left\langle \frac{h+k}{\eta} \right\rangle} \leq \frac{h+k}{\left\langle \frac{h+k}{\eta} \right\rangle} = \underline{d}(\sum_{i=1}^h \alpha_i) < \eta = \underline{d}(\sum_{i=1}^h \alpha_i)$
abschätzen.



Der Beweis von Folgerung 7 beruht indirekt auf dem in §1
notierten Resultat von Kneser; in diesem letzteren bereitet es
jedoch oft Schwierigkeiten für gegebene Mengen $\{\alpha_1, \dots, \alpha_h\}$
festzustellen, ob Ungleichung (2) oder (4) gilt, und wie in letzterem
Fall g aussieht; damit sind der Anwendbarkeit des Resultates von
Kneser im Gegensatz zu der schwächeren Folgerung 7 Grenzen gesetzt.

Ist j minimal mit $A(j) + B(j) < j$, ferner $0 \in (\alpha \cap \mathcal{L})$, so gilt
 $\underline{d}(\alpha + \mathcal{L}) \geq \frac{j}{j+1} \underline{d}(\alpha, \mathcal{L})$ nach Ostmann [7]. Wird zusätzlich $1 \in (\alpha \cap \mathcal{L})$
gefordert, muß $j \geq 3$ gelten. Dies ergibt $\underline{d}(\alpha + \mathcal{L}) \geq \frac{3}{4} \underline{d}(\alpha, \mathcal{L})$, ein
Resultat, das unter schwächeren Voraussetzungen in Folgerung 7
enthalten ist. Vgl. auch Rohrbach u. Volkmann [9].

Das folgende Beispiel zeigt, daß Mengen $\mathcal{L}$ existieren,
so daß in Folgerung 7 für $\alpha_i = \mathcal{L}$ Gleichheit gilt.

Beispiel. Sei $m > h$. Wir definieren $\mathcal{L} := \{0, 1\}^{(m)}$. Sicher gilt
 $\underline{d}(\mathcal{L}) = \frac{2}{m}$ und $\underline{d}(h\mathcal{L}) = \underline{d}(\{0, 1, \dots, h\}^{(m)}) = \frac{h+1}{m} \leq 1$. Es folgt
 $\min\{1, \frac{h+1}{2} \underline{d}(\mathcal{L})\} = \min\{1, \frac{h+1}{m}\} = \frac{h+1}{m} = \underline{d}(h\mathcal{L}).$

Mit Hilfe von Satz 5 beweisen wir

Satz 6. Sei (h, η, n) mit $n \geq 2$ gegeben. Im Falle

$h=2$ und $\frac{4}{11} \leq \eta < \frac{3}{8}$ und $n=2$ gilt $\{\{0, 2\}^{(11)}, \{0, 2, 4\}^{(11)}\} \in \mathcal{E}^*(h, \eta, n)$.

Ansonsten folgt aus $\alpha_i \in \mathcal{E}(h, \eta, n)$ und $\underline{d}(\alpha_i) = \frac{2}{\left\langle \frac{h+1}{\eta} \right\rangle}$, daß

$\alpha_1 := \dots := \alpha_h := \alpha$ ein Element aus $\mathcal{E}^*(h, \eta, n)$ definiert.

Beweis. Sei $\alpha^n \in \mathcal{E}(h, \eta, n)$, ferner $\{\alpha_1^n, \dots, \alpha_h^n\} \in \mathcal{E}^*(h, \eta, n)$.

Offensichtlich gilt

$$(75) \quad h \underline{d}(\alpha^n) \leq \underline{d}(\alpha_1^n, \dots, \alpha_h^n) \leq \underline{d}(\alpha_1^1, \dots, \alpha_h^1).$$

Wegen $n \geq 2$ und (18) genügt es, $\eta \leq \frac{4}{2}$ zu betrachten. Für $\eta \leq \frac{4}{2}$ tritt in Satz 5 Fall 1 oder Fall 2.3 ein. Vgl. dazu die Übersicht der Fallunterscheidungen am Ende vom Beweis zu Satz 5.

Fall 1 und für $\eta < \frac{4}{11}$ Fall 2.3 ergeben $\alpha_1^1 = \dots = \alpha_h^1 = \{0, 1\}^{\left\langle \frac{h+1}{\eta} \right\rangle}$

Wird nun $\underline{d}(\alpha^n) = \frac{2}{\left\langle \frac{h+1}{\eta} \right\rangle}$ vorausgesetzt, tritt

$$\underline{d}(\alpha^n) = \underline{d}(\alpha_1^n, \dots, \alpha_h^n) = \underline{d}(\alpha_1^1, \dots, \alpha_h^1)$$

in (75) ein. (10) liefert die Behauptung.

Fall 2.3 für²⁰⁾

$$(76) \quad \frac{4}{11} \leq \eta < \frac{3}{8} \quad \text{und} \quad h=2 \quad \text{und} \quad n=2$$

besagt, daß $\underline{d}(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{5}{11}$ ist. Da andererseits $\{\{0, 2\}^{(11)}, \{0, 2, 4\}^{(11)}\}$

die Eigenschaften (10i) bis (10iii), ferner die zweigliedrige

Dichte $\frac{5}{11}$ besitzt, muß (75) und (10) zufolge $\{\{0, 2\}^{(11)}, \{0, 2, 4\}^{(11)}\} \in \mathcal{E}^*(h, \eta, n)$ sein.

20) Aus $n \geq 3$ folgt $\eta \leq \frac{4}{3}$, aus $n=2$ folgt $\eta \leq \frac{4}{2}$.

Satz 6 ermöglicht eine Übertragung von Resultaten über Mengen aus $\mathcal{E}(h, \eta, n)$ auf Systeme aus $\mathcal{E}^*(h, \eta, n)$.

Folgerung 8. Für (h, η, n) gelte $n \geq 2$, nicht aber (76).

Wenn es eine Zahl x gibt, die

$$(x, \langle \frac{h+1}{\eta} \rangle) = 1 \quad \text{und} \quad h \{0, x\}^{\langle \frac{h+1}{\eta} \rangle} \text{ ist } n\text{-diskret}$$

oder

$$h < x < \frac{\langle \frac{h+1}{\eta} \rangle}{n} \quad \text{und} \quad (\langle \frac{h+1}{\eta} \rangle, n, x) = 1$$

erfüllt, existiert ein a , so daß $\alpha_i := \dots := \alpha_h := \{0, a\}^{\langle \frac{h+1}{\eta} \rangle}$ ein Element aus $\mathcal{E}^*(h, \eta, n)$ definiert.

Zum Beweis setzt man $x=a$ in Satz 3 bzw. $x=t$ in Folgerung 2. Die Behauptung folgt mit Satz 6.

Eine Übertragung von Satz 4 auf Elemente aus $\mathcal{E}^*(h, \eta, n)$ bringt

Satz 7. Sei $h \geq 2$ und n eine Primzahl und $\eta < \frac{1}{n}$.

Im Falle $h=2$ und $\frac{4}{11} \leq \eta < \frac{3}{8}$ und $n=2$ folgt

$$(77) \quad \{\{0, 2\}^{(11)}, \{0, 2, 4\}^{(11)}\} \in \mathcal{E}^*(h, \eta, n).$$

Im Falle $h=2$ und $\frac{1}{4} \leq \eta < \frac{5}{19}$ und $n=3$ folgt

$$(78) \quad \{\{0, 3\}^{(16)}, \{0, 3, 6\}^{(16)}\} \in \mathcal{E}^*(h, \eta, n).$$

Im Falle $h \equiv -1 \pmod{n}$ und $\frac{h+2}{(h+3)n} \leq \eta < \frac{h+1}{(h+2)n-1}$ existiert für

$n=3$ und $h \neq 7$ oder $n=2$ ein a , so daß durch

$$(79) \quad \alpha_i := \dots := \alpha_{h-1} := \{0, a\}^{((h+3)n)} \quad \text{und} \quad \alpha_h := \{0, a, 2a\}^{((h+3)n)}$$

ein Element aus $\mathcal{E}^*(h, \eta, n)$ gegeben ist.

In allen anderen Fällen definiert

$$(80) \quad \alpha_i := \dots := \alpha_h := a \in \mathcal{E}(h, \eta, n)$$

ein Element aus $\mathcal{E}^*(h, \eta, n)$.

Beweis. Existiert nach Satz 4 ein a , so daß

$\{0, a\}^{\langle \frac{h+1}{\eta} \rangle} \in \mathcal{E}(h, \eta, n)$ ist, tritt Satz 6 zufolge (80) ein,

ausgenommen im Falle $h=2$ und $\frac{4}{11} \leq \eta < \frac{3}{8}$ und $n=2$, in welchem

$\{\{0, 2\}^{(11)}, \{0, 2, 4\}^{(11)}\} \in \mathcal{E}^*(h, \eta, n)$ ist und somit (77) gilt.

Nach Satz 4 bleibt

$$(81) \quad h \equiv -1 \pmod{n} \quad \text{und} \quad \frac{h+1}{(h+2)n} \leq \eta < \frac{h+1}{(h+2)n-1}$$

zu betrachten. Offensichtlich folgt daraus

$$(82) \quad h+1 \geq n \quad \text{und} \quad \left\langle \frac{h+1}{\eta} \right\rangle = (h+2)n \quad \text{sowie} \quad n \leq \left[\frac{1}{\eta} \right] \leq n+1,$$

ferner $\eta < \frac{h+1}{\left\langle \frac{h+1}{\eta} \right\rangle - 1}$. Wir definieren nun $\mathcal{L}_1 := \dots := \mathcal{L}_h := \{0, n\}^{\langle \frac{h+1}{\eta} \rangle + 1}$.

Anwenden von Hilfssatz 1* und (82) ergibt für ein $g \geq 2$ und

$\{\alpha_1, \dots, \alpha_h\} \in \mathcal{E}^*(h, \eta, n)$ die Ungleichung

$$(83) \quad \frac{\sum_{i=1}^h |\alpha_i|_g - h+1}{\eta} \leq g \leq \frac{\sum_{i=1}^h |\alpha_i|_g}{2h} \left(\left\langle \frac{h+1}{\eta} \right\rangle + 1 \right)$$

sowie $\alpha_i = \alpha_i^{(g)}$ für $i=1, \dots, h$. Ist

$$r := \sum_{i=1}^h |\alpha_i|_g - 2h+1,$$

erhalten wir $\left\langle \frac{h+r}{\eta} \right\rangle = \left\langle \frac{\sum_{i=1}^h |\alpha_i|_g - h+1}{\eta} \right\rangle \leq g$ aus (83), also auch

(84)

$$\underline{d}(\alpha_1, \dots, \alpha_h) = \frac{\sum_{i=1}^h |\alpha_i|_g}{g} \leq \frac{2h+r-1}{\left\langle \frac{h+r}{\eta} \right\rangle}.$$

Wegen $\alpha_i \in \mathcal{N}$ und folglich $|\alpha_i|_g \geq 2$ für $i=1, \dots, h$, muß $r \geq 1$ sein.

Wegen (81) und (82), das heißt $\left\langle \frac{h+1}{\eta} \right\rangle = (h+1)n+n$ und $(h+1, n) = n$, existiert Hilfssatz 5 zufolge kein a mit $(a, \left\langle \frac{h+1}{\eta} \right\rangle) = 1$ und

$h\{0, a\}^{\left\langle \frac{h+1}{\eta} \right\rangle}$ ist n -diskret; also kann für $\sum_{i=1}^h |\alpha_i|_g = 2h$ nur

(85)

$$g \geq \left\langle \frac{h+1}{\eta} \right\rangle + 1$$

eintreten. Vgl. (47).

Fall 1. Sei $n \geq 5$ und $h \geq 4$ oder $n=3$ und $h \geq 8$. Für $r \geq 2$ gilt

$2hn(r-1) > (h+2)n(r-1) + 2h + (r-1)$ sowie wegen $\left\lceil \frac{1}{\eta} \right\rceil \geq n$ auch

$$2h \left\langle \frac{h+r}{\eta} \right\rangle \geq 2h \left\langle \frac{h+1}{\eta} \right\rangle + 2h \left\lceil \frac{1}{\eta} \right\rceil (r-1) \geq 2h \left\langle \frac{h+1}{\eta} \right\rangle + 2hn(r-1) >$$

$$> 2h \left\langle \frac{h+1}{\eta} \right\rangle + (h+2)n(r-1) + 2h + (r-1) = (2h+r-1) \left\langle \frac{h+1}{\eta} \right\rangle + 2h+r-1.$$

Wir haben daher $\frac{2h}{\left\langle \frac{h+1}{\eta} \right\rangle + 1} > \frac{2h+r-1}{\left\langle \frac{h+r}{\eta} \right\rangle}$ für $r \geq 2$ gezeigt. In (84)

kann also nur $r=1$ eintreten; mit (85) folgt

$$\underline{d}(\alpha_1, \dots, \alpha_h) \leq \frac{2h}{\left\langle \frac{h+1}{\eta} \right\rangle + 1} = \underline{d}(\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_h).$$

Behauptung (80) folgt mit Hilfssatz 2* und Satz 4 wegen $\mathcal{L}_1 = \dots = \mathcal{L}_h$.

Fall 2. Da n eine Primzahl ist, bleibt (81) zufolge $n=2$ oder $n=3$ und $h \leq 5$ zu betrachten.

Sei $s \geq 2$ beliebig mit

$$(86) \quad h+s-1 \not\equiv -1 \pmod{n},$$

so folgt nach Satz 4 die Existenz eines a mit

$$\mathcal{L}_{(s)}^{\#} = \{0, a\} \left\langle \left\langle \frac{h+s}{\eta} \right\rangle \right\rangle \in \mathcal{E}(h+s-1, \eta, n). \text{ Setzen wir } \mathcal{L}_{s_1}^{\#} := \dots := \mathcal{L}_{s_{h-1}}^{\#} := \mathcal{L}_{(s)}^{\#}$$

$$\text{und } \mathcal{L}_{s_h}^{\#} := s \mathcal{L}_{(s)}^{\#}, \text{ gilt offensichtlich } \underline{d}\left(\sum_{i=1}^h \mathcal{L}_{s_i}^{\#}\right) = \underline{d}((h+s-1)\mathcal{L}_{(s)}^{\#}) \leq \eta;$$

wie $\mathcal{L}_{(s)}^{\#}$ besitzt $\{\mathcal{L}_{s_1}^{\#}, \dots, \mathcal{L}_{s_h}^{\#}\}$ also die Eigenschaften

(10 i) bis (10 iii). Es muß

$$\underline{d}(\alpha_1, \dots, \alpha_h) \geq \underline{d}(\mathcal{L}_{s_1}^{\#}, \dots, \mathcal{L}_{s_h}^{\#}) = \frac{2h+s-1}{\left\langle \frac{h+s}{\eta} \right\rangle}$$

gelten. (86) ist insbesondere für $s=2$ erfüllt, was

$$(87) \quad \underline{d}(\alpha_1, \dots, \alpha_h) \geq \underline{d}(\mathcal{L}_{s_1}^{\#}, \dots, \mathcal{L}_{s_h}^{\#}) = \frac{2h+1}{\left\langle \frac{h+2}{\eta} \right\rangle}$$

bedeutet.

$$\text{Fall 2.1. Sei } h \geq 3 \text{ oder } \eta \geq \frac{h+2}{(h+3)n}.$$

Wegen $s \geq 2$ tritt

$$(2h+1) \left\langle \frac{h+s}{\eta} \right\rangle \geq (2h+s-1-s+2) \left\langle \frac{h+2}{\eta} \right\rangle + (2h+1) \left[\frac{1}{\eta} \right] (s-2)$$

ein; für $h \geq 3$ kann mit (81) wegen $\langle \xi \rangle < \xi+1$ weiter

$$\begin{aligned} (2h+1) \left\langle \frac{h+s}{\eta} \right\rangle &\geq (2h+s-1) \left\langle \frac{h+2}{\eta} \right\rangle - (s-2) \left(\frac{h+2}{h+1} (h+2)n+1 \right) + (2h+1)n(s-2) = \\ &= (2h+s-1) \left\langle \frac{h+2}{\eta} \right\rangle + (s-2) \left(n(h-2-\frac{1}{h+1})-1 \right) \geq (2h+s-1) \left\langle \frac{h+2}{\eta} \right\rangle, \end{aligned}$$

für $\frac{h+2}{(h+3)n} \leq \eta$ ähnlich

$$(2h+1) \left\langle \frac{h+5}{\eta} \right\rangle \geq (2h+5-1) \left\langle \frac{h+2}{\eta} \right\rangle + (5-2)n(h-2) \geq (2h+5-1) \left\langle \frac{h+2}{\eta} \right\rangle$$

abgeschätzt werden. Somit gilt $\frac{2h+1}{\left\langle \frac{h+2}{\eta} \right\rangle} \geq \frac{2h+5-1}{\left\langle \frac{h+5}{\eta} \right\rangle}$.

Mit (85) und (87) ist gezeigt, daß $d(\alpha_1, \dots, \alpha_h)$ gleich

$$(88) \quad \frac{2h+1}{\left\langle \frac{h+2}{\eta} \right\rangle} \text{ oder } \frac{2h}{\left\langle \frac{h+1}{\eta} \right\rangle + 1}$$

ist. Wir unterteilen nun das η -Intervall aus (81).

Mit $\frac{h+1}{(h+2)n} \leq \eta < \frac{h+2}{(h+3)n}$ folgt $\left\langle \frac{h+2}{\eta} \right\rangle = (h+3)n+1$, für $h \geq 3$

also $\frac{2h+1}{\left\langle \frac{h+2}{\eta} \right\rangle} < \frac{2h}{\left\langle \frac{h+1}{\eta} \right\rangle + 1}$ und demnach $\{\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_h\} \in \mathcal{E}^*(h, \eta, n)$,

nach Satz 5 wegen $\mathcal{L}_1 = \dots = \mathcal{L}_h \in \mathcal{E}(h, \eta, n)$ Behauptung (80).

Mit $\frac{h+2}{(h+3)n} \leq \eta < \frac{h+1}{(h+2)n-1}$ folgt $\left\langle \frac{h+2}{\eta} \right\rangle = (h+3)n$,

wegen $n=2$ oder $n=3$ und $h \leq 5$ ferner

$\frac{2h+1}{\left\langle \frac{h+2}{\eta} \right\rangle} > \frac{2h}{\left\langle \frac{h+1}{\eta} \right\rangle + 1}$. Nach (88) ergibt dies $\{\mathcal{L}_1^*, \dots, \mathcal{L}_h^*\} \in \mathcal{E}^*(h, \eta, n)$

und somit Aussage (79).

Fall 2.2. Sei schließlich $\eta < \frac{h+2}{(h+3)n}$ und $h=2$, mit (81)

also $n=3$ und $\frac{1}{4} \leq \eta < \frac{4}{15}$.

Gilt $\frac{1}{4} \leq \eta < \frac{5}{19}$, so erfüllen $\mathcal{L}_1 := \{0, 3\}^{(16)}$ und $\mathcal{L}_2 := \{0, 3, 6\}^{(16)}$ die Voraussetzungen von Hilfssatz 1*. Also existieren ein $g \geq 2$ und $\{\alpha_1, \alpha_2\} \in \mathcal{E}^*(h, \eta, n)$ mit

$$4 \leq \frac{\sum_{i=1}^2 |\alpha_i|_g}{1 - \frac{5 \cdot 16}{19 \cdot 5}} < \frac{1}{1 - \frac{5 \cdot 16}{19 \cdot 5}} < 7 \quad \text{und} \quad \frac{\sum_{i=1}^2 |\alpha_i|_g - 1}{5} 19 < g \leq \frac{\sum_{i=1}^2 |\alpha_i|_g}{5} 16.$$

Für $\sum_{i=1}^2 |\alpha_i|_g = 4 = 2h$ ergibt letztere Ungleichung $g = 12 = \left\langle \frac{h+1}{\eta} \right\rangle$

im Widerspruch zu (85), für $\sum_{i=1}^2 |\alpha_i|_g = 6$ die leere Aussage $19 < g < 20$.

Also muß $\sum_{i=1}^2 |\alpha_i|_g = 5$ und folglich $g = 16$ gelten. Mit

$$\underline{d}(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{5}{16} = \underline{d}(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2) \quad \text{und Hilfssatz 2* ist (78) gezeigt.}$$

Gilt $\frac{5}{19} \leq \eta < \frac{4}{15}$, erfüllen $\mathcal{L}_1 := \mathcal{L}_2 := \mathcal{L} := \{0, 3, 6\}^{(19)}$ die Voraussetzungen von Hilfssatz 1*. Also existieren ein $g \geq 2$ und $\{\alpha_1, \alpha_2\} \in \mathcal{E}^*(h, \eta, n)$

$$\text{mit } 4 \leq \frac{\sum_{i=1}^2 |\alpha_i|_g}{1 - \frac{4 \cdot 19}{15 \cdot 6}} < \frac{1}{1 - \frac{4 \cdot 19}{15 \cdot 6}} < 7 \quad \text{und} \quad \frac{\sum_{i=1}^2 |\alpha_i|_g - 1}{4} 15 < g \leq \frac{\sum_{i=1}^2 |\alpha_i|_g}{6} 19.$$

Für $\sum_{i=1}^2 |\alpha_i|_g = 4 = 2h$ ergibt letztere Ungleichung $g = 12 = \left\langle \frac{h+1}{\eta} \right\rangle$

im Widerspruch zu (85), für $\sum_{i=1}^2 |\alpha_i|_g = 5$ die leere Aussage $15 < g < 16$.

Also muß $\sum_{i=1}^2 |\alpha_i|_g = 6$ und folglich $g = 19$ gelten. Mit

$\underline{d}(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{6}{19} = \underline{d}(\underline{x}, \underline{y})$ und $\underline{x} \in \mathcal{E}(h, \eta, n)$ nach Satz 4 erhalten wir (80).

§ 5. Schlußbetrachtungen

1. Bisher war stets $0 < \eta < 1$ gefordert. Da durch η die Größe von Dichten abgeschätzt wird, wäre auch $\eta = 0$ und $\eta = 1$ zu betrachten.

Zu $\alpha \in \mathcal{N}$ mit $\underline{d}(h\alpha) \leq \eta = 0$ folgt offensichtlich

$\alpha = \{0, n, (h+1)n+1\} \in \mathcal{E}(h, \eta, n)$, für $\underline{d}(h\alpha) \leq \eta = 1$ ferner $N_0 \in \mathcal{E}(h, \eta, n)$.

2. Anregung zu einer Verbesserung von Satz 1 geben die folgenden Beispiele.

Sei etwa $\alpha_1 := \{0, 1\}$ und $\alpha_2 := \dots := \alpha_6 := \{0\}^{(2)}$ definiert. Dann erfüllt $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ wegen $\frac{s+h}{s+2} = \frac{s+2}{s+2} = 1 > \frac{1}{2} = \sum_{i=1}^h \underline{d}(\alpha_i)$ nicht die Voraussetzungen

von Satz 1. Betrachten wir andererseits $\alpha_1, \dots, \alpha_6$, so ist in Satz 1 wegen $\alpha_i \in \mathcal{N}$ sicher $s=1$ wählbar und demnach die Voraussetzung

$\frac{s+h}{s+2} = \frac{7}{3} < \frac{5}{2} = \sum_{i=1}^6 \underline{d}(\alpha_i)$ erfüllt. Obwohl also $\{0\}^{(2)} = 5\{0\}^{(2)}$

und folglich $\sum_{i=1}^6 \alpha_i = \sum_{i=1}^6 \alpha_i$ ist, liefert Satz 1 zwar $\sum_{i=1}^6 \alpha_i \sim N_0$,

nicht aber $\sum_{i=1}^6 \alpha_i \sim N_0$.

Als weiteres Beispiel zu Satz 1 betrachten wir das durch

$\alpha_1 := \alpha_2 := \{0, 1, 2, 3\}^{(9)}$ und $\alpha_3 := \alpha_4 := \{0, 1\}^{(9)}$ gegebene System; es gilt

$\sum_{i=1}^4 \alpha_i \sim N_0$. Wegen $\frac{s+h}{s+2} = \frac{4}{3} = \sum_{i=1}^4 \underline{d}(\alpha_i)$ liefert Satz 1 jedoch nicht

$\sum_{i=1}^4 \alpha_i \sim N_0$.

3. In § 3 wurde nur für bestimmte (h, η, n) ein $\alpha \in \mathcal{E}(h, \eta, n)$ ermittelt. In Anlehnung an die Folgerungen 2 und 3 erhebt sich

die Frage, ob $\underline{d}(\alpha) = \frac{2}{\left\langle \frac{h+1}{\eta} \right\rangle}$ nur gilt, wenn ein a mit

$$(a, \left\langle \frac{h+1}{\eta} \right\rangle) = 1 \quad \text{und} \quad n \leq a \leq \frac{\left\langle \frac{h+1}{\eta} \right\rangle - \eta}{h} \quad \text{oder ein } t \text{ mit } h < t < \frac{\left\langle \frac{h+1}{\eta} \right\rangle}{n} \quad \text{und}$$

$$(\left\langle \frac{h+1}{\eta} \right\rangle, n, t) = 1 \quad \text{existiert.}$$

4. Es bleibt zu klären, in welchen Fällen es kein a mit

$$\{0, a\}^{\left\langle \frac{h+1}{\eta} \right\rangle} \in \mathcal{E}(h, \eta, n) \quad \text{oder} \quad \{0, a\}^{\left\langle \frac{h+1}{\eta} \right\rangle + 1} \in \mathcal{E}(h, \eta, n) \quad \text{gibt.}$$

5. Hilfssatz 4 liefert nicht nur die Existenz eines a mit

$$(89) \quad (a, m) = 1 \quad \text{und} \quad \{0, a\}^{(m)} \quad \text{ist } n\text{-diskret,}$$

sondern kann im konkreten Fall auch zu dessen Berechnung herangezogen werden, wie das folgende Beispiel zeigt.

Sei $(h, m, n) = (98, 1000, 10)$. Mit den Bezeichnungen des Beweises von Hilfssatz 4 gilt $m_0 = 1000 - 990 = 10$, wegen $(99, 10) = 1$, ferner $s_t(m_0) = s_{99}(10) = 1$. Da nur für $i_0 = 9$ sowohl

$$1 \leq i_0 \leq \frac{m_0}{s_t(m_0)} = 10 \quad \text{als auch} \quad \frac{99i_0 - 1}{10} \in \mathbb{N} \quad \text{erfüllt wird, erhalten}$$

$$\text{wir } a = \frac{9 \cdot 99 - 1}{10} \cdot 10 + 9 = 899. \quad \text{Mit } a = 899 \text{ erfüllt auch } \hat{a} = 1000 - 899 = 101$$

die Bedingungen (89). Nach Satz 3 ist $\{0, 101\}^{(1000)}$ nun für

$$\frac{99}{1000} \leq \eta < \frac{99}{999} \quad \text{extrem dicht.}$$

Zusammenfassung

Für Mengen $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_h$ ($h \geq 2$) nichtnegativer ganzer Zahlen

sei die Summe $\sum_{i=1}^h \mathcal{L}_i := \{ \sum_{i=1}^h b_i \mid b_i \in \mathcal{L}_i \}$ sowie die h -gliedrige

(untere) asymptotische Dichte $\underline{d}(\alpha_1, \dots, \alpha_h) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \sum_{\substack{i=1 \\ 1 \leq f \leq x}}^h 1$ definiert.

In Satz 1, einer Verallgemeinerung eines Satzes von Schur, wird mit Hilfe einer Abschätzung von Kneser über asymptotische Dichten von Summenmengen gezeigt, welche Größe für $\underline{d}(\alpha_1, \dots, \alpha_h)$ ausreicht, um sicherzustellen, daß $\sum_{i=1}^h \alpha_i \sim N_0$ folgt. Ergänzend zu

diesem Problem und der Betrachtung maximaler Nichtbasen etwa bei Nathanson erhebt sich die Frage nach Mengensystemen $\alpha_1, \dots, \alpha_h$

maximaler h -gliedriger Dichte, deren Summe $\sum_{i=1}^h \alpha_i$ gleichwohl

noch $\underline{d}(\sum_{i=1}^h \alpha_i) \leq \eta$ ($0 < \eta < 1$) erfüllt, sowie zusätzlich, daß je zwei

aufeinanderfolgende Zahlen aus $\sum_{i=1}^h \alpha_i$ mindestens den Abstand

n haben. Solche Mengensysteme $\alpha_1, \dots, \alpha_h$ werden im Falle $\eta \geq \frac{1}{n}$ in

Satz 2 angegeben; der Fall $\eta < \frac{1}{n}$ ist für $n=1$ in Satz 5, für

$(\langle \frac{h+1}{\eta} \rangle, n, h+1) = 1$ in Satz 6, für n Primzahl in Satz 7 enthalten;

entsprechend gelten unter der zusätzlichen Voraussetzung $\alpha_1 = \dots = \alpha_h$ die Sätze 3 und 4.

Um triviale Fälle auszuschließen, werden nur solche Mengen nichtnegativer ganzer Zahlen zugelassen, die Elemente $a_1, \dots, a_k$ ($k \geq 1$) mit $(a_1, \dots, a_k) = 1$ enthalten.

Literaturverzeichnis

- [1] A. Chinčhin, Drei Perlen der Zahlentheorie, Akademie-Verlag Berlin 1951.
- [2] E. Halberstam und K.F. Roth, Sequences I, Oxford 1966.
- [3] G.H. Hardy und E.M. Wright, An Introduction to the Theory of Numbers, Oxford 1965.
- [4] M. Kneser, Abschätzungen der asymptotischen Dichte von Summenmengen, Math. Zeitschr. 58 (1953) 459 - 84.
- [5] H.B. Mann, A proof of the fundamental theorem on the density of sums of sets of positive integers, Ann. Math. 43 (1942) 523 - 27.
- [6] M.B. Nathanson, Minimal bases and maximal nonbases in additive number theory, J. Number Theory 6 (1974) 324 - 333.
- [7] H. Ostmann, Additive Zahlentheorie, I (Ergebn. der Math. und ihrer Grenzgeb., Springer), 1968.
- [8] W. Rohrbach, Einige neuere Untersuchungen über die Dichte in der additiven Zahlentheorie, Jahresber. der Deutschen Math. Vereinigung 48 (1939) 199 - 236.
- [9] H. Rohrbach und T. Volkmann, Zur Theorie der asymptotischen Dichte, J. reine und angew. Math. 192 (1953) 102 - 112.
- [10] A. Stöhr, Gelöste und ungelöste Fragen über Basen der natürlichen Zahlenreihe I, J. reine und angew. Math. 194 (1955) 40 - 65.

Lebenslauf

Am 3. Januar 1947 kam ich in Kandel Kreis Germersheim als Sohn des Volksschullehrers Hugo Stoll und dessen Ehefrau Karoline geb. Straßmair zur Welt. Die Kindheit verbrachte ich zunächst im hundertfünfzig Einwohner zählenden Dorf Vollmersweiler Kreis Germersheim, von wo ich seit April 1953 in die Volksschule des benachbarten Ortes Schaidt ging. Nach unserem Umzug in den Weinort Godramstein Kreis Landau und einem kurzen Besuch der dortigen Volksschule folgte im April 1958 mein Eintritt in das damalige Naturwissenschaftliche Gymnasium Landau, wo ich Oktober 1966 mit dem Abitur abschloss. Januar 1967 bis April 1968 kam in Zweibrücken die Ableistung des Grundwehrdienstes. Obwohl meine Interessen bis dahin mehr in Richtung Kunsterziehung und Germanistik gingen, begann ich April 1968 an der Johannes Gutenberg-Universität in Mainz Biologie und Geographie zu studieren. Da für letzteres Fach jegliches Interesse ausblieb, folgte Oktober 1969 der Wechsel auf Biologie und Mathematik. April 1970 legte ich die Zwischenprüfung Biologie, April 1972 die Zwischenprüfung Mathematik, Dezember 1975 in Mathematik und Biologie das Staatsexamen für das Lehramt an Gymnasien ab. Im Anschluß begann die Arbeit an der vorliegenden Dissertationschrift. Zum Lebensunterhalt verhalfen Tätigkeiten wie wissenschaftliche Hilfskraft, Lehrauftrag, Tutor beim Versuch Fernstudium, ein Förderungsstipendium sowie vor allem meine Eltern.

Peter Stoll

Bornergasse 30

674 Landau- Godramstein

Staatszugehörigkeit: deutsch.

Herrn Prof. Dr. Gerd Hofmeister danke ich herzlichst für zahlreiche Anregungen und das dieser Arbeit entgegengebrachte Interesse.

Druckerei Anuschk - Kilstich 21 - 6500 Mainz